Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
03.05.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

3. Übungsblatt

Aufgaben 1-3 werden in der Übung besprochen, Aufgaben 4-6 im Tutorium.

Aufgabe 1: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Matrix aus Aufgabe 1 des letzten Übungsblattes.

a) Geben Sie eine kurze Begründung dafür an, weshalb A diagonalisierbar ist.

b) Wir haben letztes Mal berechnet:

$$E_{-2}(A) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \qquad E_1(A) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Finden Sie den letzten Eigenwert indem Sie die Spur von A betrachten und den Eigenvektor dazu, indem Sie die Orthogonalität zu den anderen Eigenvektoren benutzen.

Aufgabe 2: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine orthogonale Matrix P so, dass $P^T A_\alpha P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gilt?
Geben Sie das jeweilige P an.

Aufgabe 3: a) Sei $p_1 = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$. Finden sie $n \in \mathbb{N}$ so, dass es Matrizen $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ gibt, welche paarweise nicht ähnlich sind, charakteristisches Polynom p_1 haben und alle Ähnlichkeitsklassen repräsentieren, d.h. ist $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom p_1, dann ist sie zu einer der Matrizen A_i ähnlich.

b) Betrachten Sie die gleiche Aufgabenstellung für $p_2 = (1-\lambda)^3$ und $p_3 = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.

Aufgabe 4: Gegeben sei die hermitesche Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und eine Matrix S so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar sind. Zeigen Sie, dass es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $S^{-1}AS = B$ gibt, und bestimmen Sie ein solches S.

Aufgabe 6: Untersuchen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit von auftretenden Konstanten, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{kl})_{k,l=1}^n, \quad \text{wobei } b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k-l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$