Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
10.05.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Übungsblatt

Aufgaben 1-3 werden in der Übung besprochen, Aufgaben 4-6 im Tutorium.

Aufgabe 1: Die Funktionen f, g und h sind für $(x,y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}\,, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben, und es sei $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \to g(0,0)$ für $r \to 0$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} h(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} h(x,y)\Big)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Aufgabe 2: Untersuchen Sie jeweils, ob sich die Funktion f in $(0,0)$ stetig fortsetzen lässt. Bestimmen Sie gegebenenfalls die stetige Fortsetzung.

a) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{y}\,, \quad y \neq 0$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\,, \quad (x,y) \neq (0,0)$

Aufgabe 3: Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie deren Längen.

a) $\gamma(t) = \big(t,\, |t|\big) \qquad (t \in [-1,1])$

b) $\gamma(t) = \big(\sin^3(\tfrac{1}{3}t)\cos t,\, \sin^3(\tfrac{1}{3}t)\sin t\big) \qquad (t \in [0,6\pi])$

Hinweise zur Bestimmung von $\int \|\dot\gamma(t)\|\,dt$: **b)** Benutzen Sie das Additionstheorem für Cosinus.

Aufgabe 4: Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x,y)$ für $(x,y) \to (0,0)$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

ii) $f(x,y) = \dfrac{xy}{e^{x^2}-1}$

Aufgabe 5: Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie deren Längen.

a) $\vec{r}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \vec{r}(t) := \big(t - \sin t,\, 1 - \cos t\big)$

b) $z\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto z(\varphi) := \varphi e^{i\varphi}$

Hinweis zur Bestimmung von $\int \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$: **a)** Schreiben Sie $\cos t = \cos(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t)$ und verwenden Sie das Additionstheorem für Cosinus. **b)** Es gilt $\int\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2})$.

Aufgabe 6: Die Kurve $\vec{r}\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{Arcsin} t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

a) Sei $t_0 \in (-1, 1)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente in $\vec{r}(t_0)$ an.

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\vec{r}$ und bestimmen Sie die Darstellung von $\vec{r}$ bezüglich der Bogenlänge.