Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
17.05.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

5. Übungsblatt

Aufgaben 1-3 werden in der Übung besprochen, Aufgaben 4-6 im Tutorium.

Aufgabe 1: Gegeben sei die Kurve

$$\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos(t) \\ \mathrm{e}^{-t}\sin(t) \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Länge der Kurve γ und bestimmen Sie die Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge.

Aufgabe 2: a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{für } xy \geq 0\,, \\ x+y & \text{für } xy < 0\,. \end{cases}$

Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt, soweit sie existieren.

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei im Punkt (x_0,y_0) differenzierbar. Für die Richtungen $u := (1,2)$ und $v := (-1,1)$ gelte $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) = -1$ sowie $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = 2$.

Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial w}(x_0,y_0)$ für $w := (1,1)$. Geben Sie die Richtung $h \in \mathbb{R}^2$ mit $\|h\| = 1$ an, für die $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0,y_0)$ maximal wird.

Aufgabe 3: Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x,y)$ für alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen das möglich ist.

c) Berechnen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$.

d) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

e) Ist f zweimal stetig differenzierbar?

Hinweis: Argumentieren Sie mit dem Satz von Schwarz.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\ x^2e^y + \sin x\big)$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\ y^4 + 3x^2\sin y,\ 4y - x^3\big)$

c) $f\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}^3,\ f(r,\varphi,\theta) = \big(r\cos\varphi\,\cos\theta,\ r\sin\varphi\,\cos\theta,\ r\sin\theta\big)$

d) $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$

Aufgabe 5: Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt den Gradienten von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen f_x und f_y in $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0)) \cdot v$?

e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

Aufgabe 6: Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass diese Funktion im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

b) Rechnen Sie nach, dass die partiellen Ableitungen f_x und f_y in $(0,0)$ nicht stetig sind.