Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
24.05.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Übungsblatt

Aufgaben 1-2 werden in der Übung besprochen, Aufgaben 3-5 im Tutorium.

Aufgabe 1: Seien $\alpha, \beta \geq 0$, $\gamma, \delta > 0$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|^\gamma + |y|^\delta}.$$

Zeigen Sie, dass f genau dann stetig in $(0,0)$ durch $f(0,0) = 0$ fortgesetzt werden kann, wenn $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} > 1$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Youngsche Ungleichung verwenden, d.h.

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \qquad \textit{wenn } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Aufgabe 2: Gegeben seien die Funktionen

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \sin(\cos(y)) \end{pmatrix}$,

b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = \begin{pmatrix} x + y^3 \\ e^x \end{pmatrix}$.

Wo sind die Funktionen lokal umkehrbar und wo nicht? Sind sie sogar global umkehrbar auf $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 3: Die Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$f(x,y) = \left(x^2,\, y^2\right), \qquad g(x,y) = \left(\sin(xy),\, e^{x+y}\right), \qquad h(x,y) = \left(e^x \cos y,\, \sinh x\right).$$

Berechnen Sie die Ableitungen von f, g und h, und ermitteln Sie dann mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $g \circ f$ und $h \circ g$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie $g \circ f$ und $h \circ g$ explizit angeben und ableiten.

Aufgabe 4: Wir führen auf $\mathbb{R}^2$ Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein. Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

a) Stellen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial r} := D_1 v$ und $\frac{\partial v}{\partial \phi} := D_2 v$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von u dar.

b) Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat

$$\Delta u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}(r,\phi),$$

wobei $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} := D_1^2 v$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} := D_2^2 v$ gesetzt seien.

Aufgabe 5: Die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch $g(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh x \, \cos y \\ \sinh x \, \sin y \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$ so, dass U durch die Funktion g bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $(g|_U)^{-1}\colon V \to U$ in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion g in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, dass aber g nicht injektiv ist.