Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
14.06.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

9. Übungsblatt

Aufgaben 1-3 werden in der Übung besprochen, Aufgaben 4-6 im Tutorium.

Aufgabe 1: Das Vektorfeld $\vec{g}\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)\,.$$

Bestimmen Sie die Rotation und die Divergenz von $\vec{g}$.

Aufgabe 2: a) Die Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f\,ds \qquad \text{für} \quad f(x,y,z) := 2z - \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$ für

$$\vec{v}(x,y) = (e^x, xy)\,, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Aufgabe 3: Ein Massenpunkt bewege sich unter der Wirkung des Kraftfeldes $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy, x^2+y^2)$ auf dem durch die Punkte $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ und $(-1,2)$ (in dieser Reihenfolge) gebildeten Polygonzug γ. Welche Arbeit $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$ wird hierbei geleistet?

Aufgabe 4: Berechnen Sie Rotation und Divergenz der folgenden Vektorfelder:

$$\vec{v_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xyz + 2xz \\ xy^2 - e^z \\ z - 2z^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$.

a) $\vec{v}(x,y,z) = (y, -z, x)\,, \qquad \gamma(t) = (\sinh t, \cosh t, \sinh t)\,, \quad 0 \le t \le \ln 2$

b) $\vec{v}(x,y) = (\sin x, x^2+y^2)\,, \qquad \gamma(t) = \begin{cases} (t,0)\,, & 0 \le t \le 1 \\ (1, t-1)\,, & 1 < t \le 2 \end{cases}$

Aufgabe 6: Ein C^2-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ heißt *radialsymmetrisch*, falls $f(\vec{x})$ nur von $\|\vec{x}\|$ abhängt, d.h. falls $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ mit $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ gilt.

In diesem Falle gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = F(\|\vec{x}\|)$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Zeigen Sie für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$$\Delta f(\vec{x}) = F''\big(\|\vec{x}\|\big) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}\,F'\big(\|\vec{x}\|\big)\,.$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Formel aus Aufgabe 4 b) auf Übungsblatt 6.
