Lokale Extremstellen im mehrdimensionalen

eindimensionaler Fall

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Hat f in x_0 ein lokales Maximum/Minimum, so gilt $f'(x_0) = 0$. Außerdem:

- $f''(x_0) < 0 \to f$ hat lokales Maximum in x_0.
- $f''(x_0) > 0 \to f$ hat lokales Minimum in x_0.
- $f''(x_0) = 0 \to$ weitere Untersuchung notwendig: Maximum/Minimum/Sattelpunkt möglich.

Extremwerte im mehrdimensionalen

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Hat f in $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Maximum/Minimum, so gilt $\nabla f(\vec{x_0}) = \vec{0}$.
Wir bezeichnen die Hesse-Matrix f'' mit $\nabla^2 f$. Nach dem Satz von Schwarz ist $\nabla^2 f$ symmetrisch. Außerdem:

- $\nabla^2 f(\vec{x_0})$ negativ definit (d.h. alle Eigenwerte < 0) $\to f$ hat lokales Maximum in $\vec{x_0}$.
- $\nabla^2 f(\vec{x_0})$ positiv definit (d.h. alle Eigenwerte > 0) $\to f$ hat lokales Minimum in $\vec{x_0}$.
- $\nabla^2 f(\vec{x_0}) \neq 0$ negativ semidefinit (d.h. alle Eigenwerte ≤ 0) $\to f$ hat lokales Maximum in $\vec{x_0}$ oder einen Sattelpunkt.
- $\nabla^2 f(\vec{x_0}) \neq 0$ positiv semidefinit (d.h. alle Eigenwerte ≥ 0) $\to f$ hat lokales Minimum in $\vec{x_0}$ oder einen Sattelpunkt.
- $\nabla^2 f(\vec{x_0}) = 0$ (als Matrix) $\to$ weitere Untersuchung notwendig: Maximum/Minimum/Sattelpunkt möglich.