Illustration: Lagrange-Multiplikatorregel für Kreis

Gesucht sei das Maximum/Minimum einer C^1-Funktion auf der Menge

$$M := \{(x,y)|x^2+y^2=1\}.$$

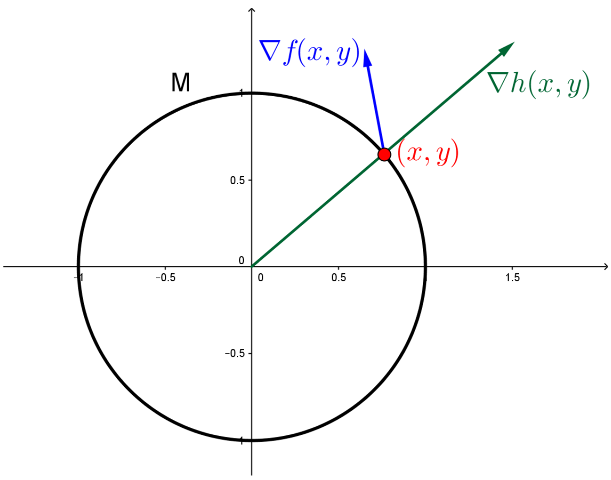
Wir definieren $h(x,y)=x^2+y^2-1$, es ist also $M=\{(x,y)|h(x,y)=0\}$. Weiter ist $\nabla h(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$. Also hat $\nabla H(x,y)$ stets Rang 1 auf M, da $\{(0,0)\}\notin M$. Wir stellen fest, dass ∇h gerade senkrecht auf der Menge M steht (das ist auch im Allgemeinen richtig, also wenn man Mengen der Form $M=\{\vec{x}|h(\vec{x})=0\}$ betrachtet). Sei nun (x,y) eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $h=0$. Die Multiplikatorenregel von Lagrange liefert die Existenz eines $\lambda\in\mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x,y) = -\lambda\nabla h(x,y).$$

Das heißt, dass der Gradient von f in Richtung des Normalenvektors zeigt.

Warum ist das so?

Der Gradient von f zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs. f steigt (lokal) in alle Richtungen $\vec{v}$ an, welche $(\vec{v},\nabla f(x,y))>0$ erfüllen und fällt in alle Richtungen $\vec{w}$, welche $(\vec{w},\nabla f(x,y)<0$ erfüllen. Damit können wir die Beziehung verstehen. Wir nehmen mal an, dass ∇f und ∇h nicht parallel sind (s. Bild).



In diesem Fall steigt f an, wenn man sich entlang des Kreises in Richtung Nordwest bewegt, und f fällt, wenn man sich in Richtung Südost bewegt. Es liegt also kein lokales Extremum von f auf M vor.