Rotation, Divergenz, Laplace

Seien $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Skalarfelder und $\vec{v}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld.

$$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} \quad \text{(nur falls n=3)}$$

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f$$

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$
$$\operatorname{div}(f\vec{v}) = f \operatorname{div} \vec{v} + (\nabla f) \cdot \vec{v}$$
$$\operatorname{rot}(f\vec{v}) = f \operatorname{rot} \vec{v} + (\nabla f) \times \vec{v}$$
$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2\nabla f \nabla g + f(\Delta g)$$

Hintereinanderausführungen:

$$\operatorname{rot} \nabla = 0$$
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \nabla \operatorname{div} - \Delta$$