Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
27.05.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Nachtrag zur Methode der Untersuchung von Stetigkeit einer Funktion in zwei Variablen im Punkt $(0,0)$

Ausgangspunkt: Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt. Wann lässt sich f stetig in $(0,0)$ fortsetzen mit Funktionswert $f(0,0) = 0$?

Das ist per Definition genau dann der Fall, wenn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$. Das ist aber äquivalent zu

$$\lim_{x\to 0} \sup_{|y|\le|x|} |f(x,y)| = 0 \quad \textbf{und} \quad \lim_{y\to 0} \sup_{|x|\le|y|} |f(x,y)| = 0.$$

Es reicht nicht nur eine der beiden Bedingungen zu prüfen (wie es in der vorletzten Übung indirekt behauptet wurde!)

Die Bestimmung von $\sup_{|y|\le|x|} |f(x,y)|$ wiederum erfolgt dann wie in der vorletzten Übung. Entweder dieser Wert wird am Rand angenommen ($|x| = |y|$) oder an einer Stelle, wo die Funktion, aufgefasst als Funktion in einer Variablen, Ableitung 0 hat.

In der Praxis ist diese Methode zum Nachweis der Stetigkeit oft zu umständlich. Allerdings eignet sich diese Methode nach wie vor hervorragend zum Konstruieren einer Folge um zu zeigen, dass eine Funktion nicht stetig fortgesetzt werden kann.