

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Die Summe $A+C$ ist nicht definiert, weil die Spaltenanzahl von A und C nicht übereinstimmt. Auch das Produkt CB ist undefiniert, denn bei Matrizenprodukten muss die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors sein. Alle anderen Ausdrücke können wir berechnen:

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3i & 12+2i & -11-i \\ 6+2i & 7+3i & -8+i \\ 0 & 3 & 3-3i \end{pmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5i & 6 \\ 6-i & 6-2i \\ 2i & -6-7i \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Insbesondere gilt $AB \neq BA$, d.h. Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.

- b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Für $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt

$$LA = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_{11} + 2l_{12} \\ 0 & l_{21} + 2l_{22} \end{pmatrix}.$$

Also ist LA gleich der Nullmatrix genau dann, wenn $l_{11} + 2l_{12} = 0$ und $l_{21} + 2l_{22} = 0$ gelten. Dies sind zwei (homogene) lineare Gleichungssysteme. Die erweiterte Matrix zu $l_{11} + 2l_{12} = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{bzw. kurz} \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \right)$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor, so dass man direkt mit dem (-1) -Ergänzungstrick die Lösung ablesen kann

$$\begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ -s \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Analog erhält man für die Lösung von $l_{21} + 2l_{22} = 0$

$$\begin{pmatrix} l_{21} \\ l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Folglich gilt $LA = 0$ genau für Matrizen der Form

$$L = \begin{pmatrix} 2s & -s \\ 2t & -t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Aufgabe 2

a) Mit Zeilenumformungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + 5Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{Z_3 \rightarrow Z_3 + 5Z_1 \\ Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Z_4 \rightarrow Z_4 - 6Z_3 \\ Z_1 \rightarrow Z_1 - 3Z_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -14 & -15 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -30 & -30 & -6 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{Z_1 \rightarrow -Z_1 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 + 2Z_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_1 \rightarrow Z_1 + Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{\text{Zeilen} \\ \text{permutieren}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass A regulär ist, und haben zugleich $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet.

Für die Matrix B ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Z_4 \rightarrow Z_4 - 3Z_3 \\ Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{Z_1 \rightarrow -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Also ist B regulär mit $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Da A und B regulär sind, gilt:

$$\begin{aligned}
 (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & 49 & 10 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -38 & -45 & -9 & -2 \end{pmatrix} \\
 (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & -2 \\ 1 & 5 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Hier verwendeten wir das folgende Resultat: Ist $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so ist auch D^T regulär und es gilt $(D^T)^{-1} = (D^{-1})^T$.

In der Tat ergibt sich mit den Rechenregeln für das Transponieren von Matrizen

$$(D^{-1})^T D^T = (DD^{-1})^T = I_n^T = I_n \quad \text{und} \quad D^T (D^{-1})^T = (D^{-1}D)^T = I_n^T = I_n.$$

b) Da A und AB regulär sind, erhalten wir jeweils die eindeutig bestimmten Lösungen

$$x = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad x = (AB)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Wiederholung des Gram-Schmidt-Verfahrens:

In einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ seien n linear unabhängige Vektoren $x_1, \dots, x_n$ gegeben. Wir wollen ein Orthonormalsystem $u_1, \dots, u_n \in V$ so konstruieren, dass $\text{lin}\{u_1, \dots, u_j\} = \text{lin}\{x_1, \dots, x_j\}$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt.

Wir bestimmen zunächst nur ein Orthogonalsystem $v_1, \dots, v_n$ mit der Eigenschaft $\text{lin}\{v_1, \dots, v_j\} = \text{lin}\{x_1, \dots, x_j\}$ für alle $j = 1, \dots, n$. (Bei einem Orthogonalsystem wird nur verlangt, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind, nicht aber, dass sie Norm 1 haben.) Die Forderung $\text{lin}\{v_1\} = \text{lin}\{x_1\}$ können wir erfüllen, indem wir $v_1 := x_1$ setzen. Dann geht unser Verfahren rekursiv weiter: Haben wir für ein gewisses $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ein Orthogonalsystem $v_1, \dots, v_j$ mit $\text{lin}\{v_1, \dots, v_j\} = \text{lin}\{x_1, \dots, x_j\}$ gefunden, so ist die Frage, wie wir v_{j+1} definieren sollen. Setzen wir

$$v_{j+1} := x_{j+1} + \sum_{k=1}^j \lambda_k v_k$$

mit gewissen $\lambda_k \in \mathbb{K}$, so ist die Forderung $\text{lin}\{v_1, \dots, v_{j+1}\} = \text{lin}\{x_1, \dots, x_{j+1}\}$ erfüllt. Damit dieses v_{j+1} zusätzlich orthogonal zu allen v_i mit $i \in \{1, \dots, j\}$ ist, muss

$$0 \stackrel{!}{=} \langle v_{j+1}, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \sum_{k=1}^j \lambda_k \langle v_k, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$$

für alle $i \in \{1, \dots, j\}$ gelten. Folglich wählen wir

$$\lambda_i := -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}.$$

Fassen wir zusammen: Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ werden rekursiv definiert durch

$$v_1 := x_1, \quad v_{j+1} := x_{j+1} - \sum_{k=1}^j \frac{\langle x_{j+1}, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Man beachte: Die Vektoren $x_1, \dots, x_n$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig; daher gilt $x_1 \neq 0$ und $x_{j+1} \notin \text{lin}\{x_1, \dots, x_j\} = \text{lin}\{v_1, \dots, v_j\}$ für $j = 1, \dots, n-1$, und damit folgt $v_j \neq 0$ für alle j . Somit ist die Division durch $\|v_k\|^2$ möglich.

Setzen wir nun noch $u_j := v_j / \|v_j\|$ ($j = 1, \dots, n$), so haben wir ein Orthonormalsystem mit den geforderten Eigenschaften bestimmt.

a) Die gegebenen Vektoren x_1, x_2, x_3 sind linear unabhängig. Um das zu sehen, kann man die Vektoren zeilenweise in eine Matrix schreiben und diese auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 0 \\ 5 & 3i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \rightarrow Z_3 - 5Z_1]{Z_2 \rightarrow Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 3i & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 - \frac{3}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Führe nun das Gram-Schmidt-Verfahren durch:

$$v_1 := x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\langle x_2, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot \bar{1} + 2i \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{1} = 2$$

erhalten wir

$$v_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|v_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von v_3 brauchen wir die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \langle x_3, v_1 \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \bar{1} + 3i \cdot \bar{0} + 1 \cdot \bar{1} = 6, \\ \langle x_3, v_2 \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \bar{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{-1} = 5 - 6i^2 - 1 = 10. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} v_3 &:= x_3 - \sum_{k=1}^2 \frac{\langle x_3, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \\ u_3 &:= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fazit: u_1, u_2, u_3 ist ein Orthonormalsystem mit den gewünschten Eigenschaften.

- b) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren y_1, y_2, y_3 auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \rightarrow Z_3 + 3Z_1]{Z_2 \rightarrow Z_2 - 5Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit sind y_1, y_2, y_3 linear abhängig, insbesondere können wir an der Zeilenstufenform ablesen, dass y_3 eine Linearkombination von y_1 und y_2 ist (dies ist möglich, da bei den Zeilenumformungen keine Zeilen vertauscht wurden). Infolgedessen gilt $\text{lin}\{y_1, y_2, y_3\} = \text{lin}\{y_1, y_2\}$.

Wir sehen außerdem, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\text{lin}\{y_1, y_2\}$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$v_1 := y_1, \quad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2} y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\langle y_2, v_1 \rangle = 5 - 1 + 1 - 1 = 4$ und wir erhalten

$$v_2 := y_2 - \frac{\langle y_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von $\text{lin}\{y_1, y_2\} = \text{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$.

Aufgabe 4

- a) Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Nach **a)** müssen wir die beiden Vektoren zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$ ergänzen. Dazu bestimmen wir zunächst einen Vektor $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ mit

$$\left\langle z, \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \left\langle z, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Komponentenweise geschrieben und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert bedeutet das

$$-iz_1 - z_2 = 0 \quad \text{und} \quad z_1 + iz_2 + (1+i)z_3 = 0.$$

Die erste Gleichung können wir mit $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)z_3 = 0$, also $z_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}$$

müssen wir noch normieren, also durch seine Norm $\|z\| = \sqrt{1^2 + (-i)^2 + (-1+i)(-1-i)} = \sqrt{1+1+2} = 2$ teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt, man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.

- b) Im folgenden sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine unitäre Matrix.

- i) Sei $z \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$\|Az\|^2 = \langle Az, Az \rangle = \langle \underbrace{A^* A}_{=I_n} z, z \rangle = \langle z, z \rangle = \|z\|^2.$$

$$\text{Alternativ: } \langle Az, Az \rangle = (\overline{Az})^T Az = (\overline{A} \overline{z})^T Az = \overline{z}^T \overline{A}^T Az = \overline{z}^T \underbrace{(A^* A)}_{=I_n} z = \overline{z}^T z = \langle z, z \rangle.$$

- ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass es einen Vektor $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Az = \lambda z$. [Ein solches λ heißt *Eigenwert von A* und z ein *zugehöriger Eigenvektor*]. Mit Hilfe von **i)** erhält man dann

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \langle Az, Az \rangle = \langle \lambda z, \lambda z \rangle = \lambda \langle z, \lambda z \rangle = \lambda \overline{\lambda} \langle z, z \rangle = |\lambda|^2 \langle z, z \rangle = |\lambda|^2 \|z\|^2.$$

Division mit $\|z\|^2 \neq 0$ (wegen $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$) ergibt $|\lambda|^2 = 1$, also $|\lambda| = 1$.