Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Sei $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

i) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= +2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\big(1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1\big) - 2\big(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1\big) + 4\big(-1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1\big) = -4. \end{aligned}$$

ii) Wir ersetzen die 2. Spalte durch die Summe der 1. und 2. Spalte und entwickeln die resultierende Matrix nach der 2. Spalte:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) = -4.$$

b) Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz. [Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\begin{aligned} \det(A) &=_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_4 \to Z_4 - Z_1]} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 - Z_1]} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2\big((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 2\big) = 16. \end{aligned}$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\begin{aligned} \det(B) &=_{[Z_1 \to Z_1 + Z_4]} \det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =_{[S_j \to S_j - S_1, j=2,3,4]} \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_3]} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -5(8+1) = -45. \end{aligned}$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_4]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} =_{[S_4 \to S_4 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} =_{[S_3 \to S_3 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} = \alpha - 4 - 1 = \alpha - 5.$$

Man sieht: $\det C \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist C genau für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$ regulär.

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned} D_1(x) &= \det(a_0) = a_0 \\ D_2(x) &= \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = a_0 x + a_1 \\ D_3(x) &= \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } S_1]} a_0 \det \begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -1 & x \end{pmatrix} = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \end{aligned}$$

b) Vermutung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $D_{n+1}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$.

Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion.

Den Induktionsanfang haben wir schon in Teil **a)** gezeigt. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest. Für dieses n gelte

$$D_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \qquad \text{(IV)}.$$

Dann folgt:

$$D_{n+2}(x) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_{n+1} \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_{n+2}]} \ (-1)^{n+2+1} a_{n+1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}} + (-1)^{n+2+n+2} x D_{n+1}(x)$$

$$= (-1)^{n+1} a_{n+1} (-1)^{n+1} + x D_{n+1}(x) =_{[\text{(IV)}]} \ a_{n+1} + x \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

$$= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{n+1-k}.$$

Somit ist unsere Vermutung bewiesen.

c) Wählen wir in der gegebenen Matrix $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = x = -1$, so gilt:

$$\det(B_{n+1}) = (-1)^{n+1} D_{n+1}(-1) =_{[\mathbf{b)}]} \ (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)(-1)^{n-k}$$
$$= (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Matrix B_{n+1} ist also genau dann invertierbar, falls n gerade ist. Man kann an der Matrix auch ablesen, dass für ungerades n die 1. Zeile die Summe der $2., 4., \ldots$ und $(n+1)$-ten Zeile ist und die Matrix in diesem Fall nicht invertierbar sein kann.

Aufgabe 3

a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}$.
Nein (außer für $n = 1$). Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. [Verwende n-mal (D2)]

b) $\det(A + B) = \det A + \det B$?
Nein (außer für $n = 1$ oder besonders ausgewählte Matrizen A und B, etwa $A = 0$).
Zum Beispiel ist $\det(I_2 + I_2) = \det(2I_2) = 2^2 \det I_2 = 4 \neq 2 = \det I_2 + \det I_2$.

c) $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$?
Ja. $\det A$ ist ja nur eine Zahl (vgl. Erläuterung im **a)**-Teil).

Aufgabe 4

Mit $A = (a_1, a_2, a_3)$ bezeichnen wir die Koeffizientenmatrix des gegebenen linearen Gleichungssystems, mit b die rechte Seite. Die Cramersche Regel ist nur anwendbar, wenn A regulär ist; wegen

$$\det(A) =_{\left[\substack{Z_2 \to Z_2 + Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 - 2Z_1}\right]} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. } S_1]} \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 + Z_1]} \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -15 \neq 0$$

ist dies der Fall. Nach der Cramerschen Regel gilt dann

$$x_1 = \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det(a_1, b, a_3)}{\det(A)}, \qquad x_3 = \frac{\det(a_1, a_2, b)}{\det(A)}.$$

Wir erhalten also

$$x_1 = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_3 \to Z_3 + Z_1]} -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{13}{15}\,.$$

Auch bei x_2 und x_3 addieren wir jeweils die erste Zeile zur dritten und entwickeln dann nach der zweiten bzw. dritten Spalte:

$$x_2 = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\,,$$
$$x_3 = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\,.$$

Also ist $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{13}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{2}{3})$ die eindeutig bestimmte Lösung des gegebenen Systems.