

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik**

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $x \times y$, $\langle x \times y, x \rangle$, den Winkel, den die Vektoren x und y einschließen, sowie den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte?

Aufgabe 3

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Untersuchen Sie A auf Diagonalisierbarkeit. Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix S und ihre Inverse S^{-1} so an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.
- Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$, die das lineare Gleichungssystem $Ax = 2x$ lösen.
- Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine reguläre Matrix S so an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Ist es möglich, die Matrix S orthogonal zu wählen?

Aufgabe 6

- a) Finden Sie Matrizen mit den folgenden Eigenschaften:
- i) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und A hat nur den Eigenwert 5.
 - ii) $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und B hat paarweise verschiedene reelle Eigenwerte.
 - iii) $C \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ und $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda$ ist das charakteristische Polynom von C .
- b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und λ ein Eigenwert von A . Zeigen Sie, dass dann $\lambda^2 + 5$ ein Eigenwert von $A^2 + 5I_n$ ist.
- c) Ist die folgende Aussage wahr?
Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.

Hinweis In der großen Übung am 17.05. werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4 und 5**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.