Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dr. Semjon Wugalter

Sommersemester 2018

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik**

**Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt**

## Aufgabe 1

Für $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$x \times y = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 2-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\langle x \times y, x \rangle = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$$

[dieses Ergebnis war zu erwarten, weil stets $x \times y$ sowohl orthogonal auf $x$ als auch orthogonal auf $y$ steht]. Für den Winkel $\theta$, den die Vektoren $x$ und $y$ einschließen, gilt

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4+0+4}} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = -\sqrt{\frac{6}{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Hieraus folgt $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Der Flächeninhalt des von $x$ und $y$ aufgespannten Parallelogramms lautet

$$\|x \times y\| = \| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}\,.$$

## Aufgabe 2

Zunächst zur Matrix $A$: Die Eigenwerte von $A$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Dieses lautet

$$\det \begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_2]} \det \begin{pmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det \begin{pmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18-\lambda) \det \begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda) + 4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324\big) = -(\lambda-18)^3.$$

Wegen $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 18$ besitzt die Matrix $A$ nur den Eigenwert 18; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum $E_A(18)$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $Ax = 18x$ bzw. $(A - 18I_3)x = 0$, also genau $\mathrm{Kern}(A - 18I_3)$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 18I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \frac{1}{2} Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{4} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des $(-1)$-Ergänzungstricks ab

$$E_A(18) = \mathrm{Kern}(A - 18 I_3) = \{ s \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{C} \} = \mathrm{lin}( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ).$$

Der Eigenwert 18 hat die geometrische Vielfachheit 2, weil der Eigenraum $E_A(18)$ zweidimensional ist. Jetzt zur Matrix $B$: Wir berechnen das zugehörige charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_1 \to Z_1 + (1-\lambda) Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 + 2 Z_3}\right]} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2 - 2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. n. } S_1]} -\det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2 - 2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2 (1-\lambda)\big) = (\lambda^2 - 2)(1 - \lambda)\,.$$

Wegen $\chi_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ hat die Matrix $B$ die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.
Wir bestimmen nun den Eigenraum $E_B(1)$ zu $\lambda_1 = 1$, also die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $(B - I_3)x = 0$:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_2 + 2 Z_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -Z_1,\, Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des $(-1)$-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_B(1) = \mathrm{lin}( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ).$$

Der Eigenwert 1 besitzt die geometrische Vielfachheit 1, weil der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.
Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Analoges Vorgehen wie eben ergibt

$$E_B(\sqrt{2}\,) = \mathrm{lin}( \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix} ) \qquad \text{und} \qquad E_B(-\sqrt{2}\,) = \mathrm{lin}( \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix} ).$$

Die geometrische Vielfachheit von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ beträgt jeweils 1. Die Matrix $B$ ist diagonalisierbar, weil für jeden Eigenwert von $B$ geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

### Aufgabe 3

**a)** Wir berechnen zunächst die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von $A$. Für das charakteristische Polynom von $A$ ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_3 \to Z_3 - Z_2]} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_3 \to S_2 + S_3]} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. } Z_3]} -(\lambda - 1) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda - 1)\big((2-\lambda)(3-\lambda) - 2\big) = -(\lambda - 1)\big(\lambda^2 - 5\lambda + 4\big) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4).$$

Die Eigenwerte von $A$ sind genau die Nullstellen von $\chi_A$, also $1, 4$. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(1) = \mathrm{Kern}(A - I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}),$$
$$E_A(4) = \mathrm{Kern}(A - 4I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, ist $A$ diagonalisierbar. Aus dem gleichen Grund gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Um ein solches $S$ zu bestimmen, muss man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $A$ angeben.

Setze

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_A(4) \qquad \text{sowie} \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_A(1).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander, also gilt $v_1 \perp v_2$. Ist

$$v_3 := v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

definiert, so sind $v_3 \perp v_1$ und $v_3 \perp v_2$. Wegen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ folgt, dass die Vektoren $v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig sind und somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Aufgrund von $v_1 \in E_A(4)$, $\dim E_A(4) = 1$ und $\dim E_A(1) = 2$ ergibt sich $E_A(1) = \mathrm{lin}(v_2, v_3)$.

Folglich ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $A$ gegeben durch $\frac{1}{\|v_1\|}\, v_1$, $\frac{1}{\|v_2\|}\, v_2, \frac{1}{\|v_3\|}\, v_3$, also durch

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

orthogonal und es gilt

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**b)** Das lineare Gleichungssystem $Ax = 2x$ hat die triviale Lösung $x = 0$. Würde $Ax = 2x$ für ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gelten, dann wäre 2 ein Eigenwert von $A$, was aber nach **a)** nicht der Fall ist. Folglich ist $x = 0$ die einzige Lösung von $Ax = 2x$.

**c)** Ist $D := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gesetzt, so gilt gemäß **a)**: $S^{-1}AS = D$ bzw. $A = SDS^{-1}$ $(*)$.

Hieraus folgt $A^k = SD^kS^{-1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Beweis durch Induktion:

IA: $A^1 = SD^1S^{-1}$ gilt nach $(*)$.

IS: Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $A^k = SD^kS^{-1}$ (IV). Dann folgt:

$$A^{k+1} = AA^k \overset{(*),(\mathrm{IV})}{=} (SDS^{-1})(SD^kS^{-1}) = SD(S^{-1}S)D^kS^{-1} = SD^{k+1}S^{-1}.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ erhält man $D^k = \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und somit

$$A^k = SD^kS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4^k}{\sqrt{3}} & \frac{4^k}{\sqrt{3}} & \frac{4^k}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4^k+2}{3} & \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k-1}{3} \\ \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k+2}{3} & \frac{4^k-1}{3} \\ \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k+2}{3} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4**

Es gilt

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.}Z_2]} (\alpha-\lambda)\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw.}Z_1]} (\alpha-\lambda)(-\lambda)\det \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\alpha-\lambda)^2\lambda^2.$$

Fall 1: $\alpha = 0$. Dann ist $\lambda = 0$ einziger Eigenwert von $A$ mit der algebraischen Vielfachheit 4. Für den zugehörigen Eigenraum $E_A(0)$ ergibt sich

$$E_A(0) = \mathrm{Kern}(A - 0I_4) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Also ist $\dim E_A(0) = 2 \neq 4$ und somit ist $A$ in diesem Fall nicht diagonalisierbar.

Fall 2: $\alpha \neq 0$. Dann sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \alpha$ jeweils Eigenwerte von $A$ mit der algebraischen Vielfachheit 2. Um $\dim E_A(0)$ zu ermitteln, könnte man wie im vorigen Fall $E_A(0)$ explizit angeben und die Dimension ablesen. Alternativ schließen wir aus

$$\dim \mathrm{Bild}(A - 0I_4) = \mathrm{rg}(A - 0I_4) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

mit der Dimensionsformel $\dim E_A(0) = \dim \mathrm{Kern}(A - 0I_4) = \dim \mathbb{C}^4 - \dim \mathrm{Bild}(A - 0I_4) = 4 - 2 = 2$. Somit stimmt für den Eigenwert 0 geometrische und algebraische Vielfachheit überein.

Ferner ist

$$\dim \mathrm{Bild}(A - \alpha I_4) = \mathrm{rg}(A - \alpha I_4) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \overset{\alpha \neq 0}{=} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4, \end{cases}$$

woraus

$$\dim E_A(\alpha) = 4 - \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases}$$

folgt. Also ist nur für $\alpha = 4$ geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\alpha$ identisch. Fazit: $A$ ist genau für $\alpha = 4$ diagonalisierbar.

**Aufgabe 5**

Wir berechnen das charakteristische Polynom von $A$: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

$$= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}\right]} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2 \to S_2 + S_4]} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_4]} (4-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2 \to S_2 - S_3]} (4-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_3]} (4-\lambda)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2 \big((3-\lambda)(1-\lambda) - 3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3.$$

Die Matrix $A$ besitzt also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen nun die Eigenräume:
Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das lineare Gleichungssystem $(A - 0I_4)x = 0$, also $Ax = 0$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 + 2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir $x_4 \in \mathbb{C}$ beliebig, so folgt aus der ersten/letzten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den eindimensionalen Eigenraum

$$E_A(0) = \{ \begin{pmatrix} -x_4 \\ x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{C}\} = \operatorname{lin}(c_1)\,, \qquad \text{wobei} \quad c_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 - Z_1 \\ Z_4 \to Z_4 + Z_1}]{Z_2 \to Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des $(-1)$-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_A(4) = \operatorname{lin}(c_2, c_3, c_4)\,, \qquad c_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A$ ist als reelle, symmetrische Matrix diagonalisierbar (Alternativ könnte man mit den geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte argumentieren). Da $c_1$ eine Basis von $E_A(0)$ und $c_2, c_3, c_4$ eine Basis von $E_A(4)$ ist, gilt für die Matrix $S$ mit den Spalten $c_1, c_2, c_3, c_4$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ symmetrisch ist, gibt es sogar eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$P^TAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Bemerkung:* Um ein solches $P$ anzugeben, bestimmen wir jeweils eine Orthonormalbasis der Eigenräume. Eine Orthonormalbasis von $E_A(0)$ ist z.B. gegeben durch $b_1 := \frac{1}{\|c_1\|}\, c_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $E_A(4)$ verwenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren:

$$b_2 := \frac{1}{\|c_2\|}\, c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 := c_3 - \langle c_3, b_2\rangle b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_3 := \frac{1}{\|v_3\|}\, v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_4 := c_4 - \langle c_4, b_2\rangle b_2 - \langle c_4, b_3\rangle b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b_4 := \frac{1}{\|v_4\|}\, v_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Somit bildet $b_2, b_3, b_4$ eine Orthonormalbasis von $E_A(4)$.
Besitzt die Matrix $P$ die Spalten $b_1, b_2, b_3, b_4$, dann ist $P$ orthogonal (d.h. $P^{-1} = P^T$) und es gilt

$$P^TAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6**

**a)** **i)** Setze zum Beispiel $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wegen

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^3 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 5$$

ist 5 der einzige Eigenwert von $A$.

**ii)** Setze zum Beispiel $B := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ mit paarweise verschiedenen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dann sind $a, b, c, d$ die Eigenwerte der Diagonalmatrix $B$. Nach Voraussetzung sind diese reell und paarweise verschieden.

**iii)** Es ist $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2-4) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)$. Wegen $\chi_C(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \{0, -1, 1, -2, 2\}$ sind $0, -1, 1, -2, 2$ die Eigenwerte von $C$.

Somit hat zum Beispiel $C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die geforderte Eigenschaft.

**b)** Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, d.h. es gibt $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$. Dann gilt

$$(A^2 + 5I_n)x = A^2x + 5I_nx = A(Ax) + 5x = A(\lambda x) + 5x = \lambda Ax + 5x = \lambda\lambda x + 5x = (\lambda^2+5)x\,,$$

d.h. $\lambda^2 + 5$ ist ein Eigenwert von $A^2 + 5I_n$ und $x$ ein zugehöriger Eigenvektor.

*Bemerkung:* Ist $x$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$, so gilt $A^n x = \lambda^n x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies bestätigen wir mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

IA ($n = 1$): $Ax = \lambda x$ gilt nach Voraussetzung.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $A^n x = \lambda^n x$ (IV). Dann folgt:

$$A^{n+1}x = A(A^n x) \stackrel{\text{(IV)}}{=} A(\lambda^n x) = \lambda^n Ax = \lambda^n \lambda x = \lambda^{n+1}x.$$

Damit ergibt sich für ein beliebiges Polynom $p(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n$ ($N \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$)

$$p(A)x = \sum_{n=0}^N a_n A^n x = \sum_{n=0}^N a_n \lambda^n x = p(\lambda)x.$$

(Hierbei ist $A^0 := I_n$ gesetzt.) Also ist $x$ ein Eigenvektor von $p(A)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

**c)** Die Aussage "Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt mindestens einen reellen Eigenwert" ist i.a. falsch. Beispielsweise hat die reelle Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wegen $\chi_B(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$ nur die nicht-reellen Eigenwerte $i, -i$.