

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik inkl.**

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie ob die folgende Matrix positiv definit sind.

$$B = (b_{kl})_{k,l=1}^3, \quad \text{wobei } b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k - l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x_k, y_k)$ für $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$, $(x_k, y_k) \neq (0, 0)$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \qquad \text{b) } f(x, y) = \frac{xy}{e^{x^2} - 1}$$

Aufgabe 3

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sind für $(x, y) \neq (0, 0)$ durch

$$f(x, y) := \frac{2x^3}{x^2 + y^2} + y^2, \quad g(x, y) := \frac{|xy|^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2}$$

gegeben, und es sei $f(0, 0) := g(0, 0) := 0$. Untersuchen Sie die Funktionen f und g auf Stetigkeit.

Aufgabe 4

Die Funktionen f , g und h sind für $(x, y) \neq (0, 0)$ durch

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad h(x, y) := \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

gegeben, und es sei $f(0, 0) := g(0, 0) := h(0, 0) := 0$. Zeigen Sie:

- Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- Die Funktion g ist in $(0, 0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \rightarrow g(0, 0)$ für $r \rightarrow 0$.
- Die Funktion h ist in $(0, 0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) \right) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} h(x, y) \right)$$

existieren und stimmen mit $h(0, 0)$ überein.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1 und 4**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.