Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dr. Semjon Wugalter

Sommersemester 2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix B. Es gilt

$$\det(B-\lambda I) = -2\cdot 2(1-\lambda)+(1-\lambda)[(1-\lambda)^2-4] = (1-\lambda)[\lambda^2-2\lambda-7].$$

Die Matrix hat positive und negative Eigenwerte, sie ist nicht positiv definit.

Aufgabe 2

a) Für jedes $(x,y)\neq(0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2+1)-1} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+1}+1 \end{aligned}$$

und somit ergibt sich (wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion)

$$f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = 2\,.$$

Bemerkung: Da der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert, lässt sich die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ zu einer stetigen Funktion $\widetilde{f}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ fortsetzen mit

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y)\neq(0,0), \\ 2 & \text{für } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

b) Für $x\neq 0$ gilt

$$f(x,0)=0 \xrightarrow{x\to 0} 0 \qquad \text{und} \qquad f(x,x)=\frac{x^2}{e^{x^2}-1} \xrightarrow{x\to 0} \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = 1\,,$$

d.h. bei unterschiedlicher Annäherung an den Nullpunkt erhält man verschiedene Werte. Folglich existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

Aufgabe 3

Auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f auch stetig: Für jedes $(x,y)\neq(0,0)$ gilt

$$|f(x,y)| = \frac{|2x^2|}{x^2+y^2}|x|+y^2 \leqslant 2\,|x|+y^2 \to 0 \qquad \text{für } (x_k,y_k)\to(0,0),$$

also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, d.h. f ist stetig in $(0,0)$.
Die Funktion g ist nicht stetig, weil für $x_k=y_k,\ x_k\to 0$ konvergiert $f(x_k,y_k)$ gegen ∞.

Aufgabe 4

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f auch stetig: Mit Hilfe von $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ [Diese Ungleichung folgt aus der binomischen Formel: $0 \leqslant (|x|-|y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2 \Rightarrow |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$] ergibt sich für jedes $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,|y| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|y| \to 0 \qquad \text{für } (x,y) \to (0,0),$$

also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, d.h. f ist stetig in $(0,0)$.

Alternativ: Sei $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ und $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte $r_n > 0$ und $\phi_n \in [0,2\pi)$ mit $(x_n,y_n) = (r_n\cos\phi_n, r_n\sin\phi_n)$. Ferner führt $(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ auf $r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Damit gilt

$$f(x_n,y_n) = f(r_n\cos\phi_n, r_n\sin\phi_n) = \frac{(r_n\cos\phi_n)(r_n\sin\phi_n)^2}{(r_n\cos\phi_n)^2 + (r_n\sin\phi_n)^2} = r_n\cos\phi_n\,\sin^2\phi_n\,,$$

also $|f(x_n,y_n)| \leqslant r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Es folgt $f(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und daher $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

b) Die Funktion g ist nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt $(1/n^2, 1/n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, aber

$$g(1/n^2,1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)\,.$$

Sei nun $\phi \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Im Fall $\cos\phi = 0$ ist $g(r\cos\phi, r\sin\phi) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 = g(0,0)$. Im Fall $\cos\phi \neq 0$ ergibt sich

$$g(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{r^3\cos\phi\,\sin^2\phi}{r^2\cos^2\phi + r^4\sin^4\phi} = \frac{r\cos\phi\,\sin^2\phi}{\cos^2\phi + r^2\sin^4\phi} \xrightarrow{r\to 0} \frac{0}{\cos^2\phi + 0} = 0 = g(0,0)\,.$$

c) Wegen $h(x,x) = 1 \to 1 \neq 0 = h(0,0)$ für $x \to 0$ ist die Funktion h in $(0,0)$ nicht stetig.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2 + (1-y/x)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

Folglich existiert $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} h(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = h(0,0)$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.