Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dr. Semjon Wugalter

Sommersemester 2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wegen

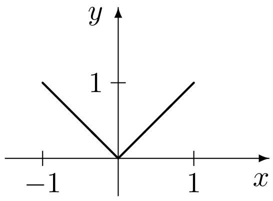
$$\gamma(t) = (t,\, |t|) = \begin{cases} (t,\, -t) & \text{für } t \in [-1, 0) \\ (t,\, t) & \text{für } t \in [0, 1] \end{cases}$$

ist

$$\dot\gamma(t) = \begin{cases} (1,\, -1) & \text{für } t \in (-1, 0) \\ (1,\, 1) & \text{für } t \in (0, 1) \end{cases}$$

und für die Länge der Kurve γ (bzgl. der Euklid-Norm $\|\cdot\|_2$) ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_{-1}^{1} \|\dot\gamma(t)\|_2 \, dt = \int_{-1}^{0} \|(1, -1)\|_2 \, dt + \int_{0}^{1} \|(1, 1)\|_2 \, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\,.$$

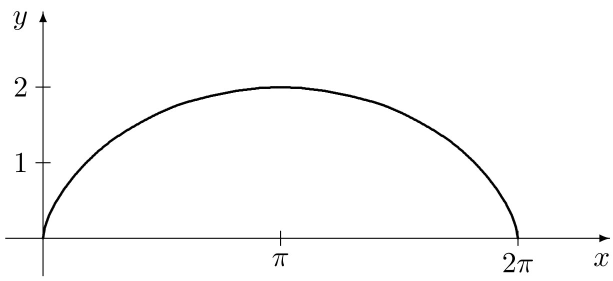


b) Für jedes $t \in [0, 2\pi]$ gilt $\dot\gamma(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und damit

$$\begin{aligned} \|\dot\gamma(t)\|_2^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t \\ &= 2\big(1 - \cos(\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}t)\big) = 2\big(1 - \cos^2(\tfrac{1}{2}t) + \sin^2(\tfrac{1}{2}t)\big) = 4\sin^2(\tfrac{1}{2}t)\,. \end{aligned}$$

Definitionsgemäß ergibt sich also für die Länge von γ (bzgl. der Euklid-Norm $\|\cdot\|_2$)

$$L(\gamma) = \int_{0}^{2\pi} \|\dot\gamma(t)\|_2 \, dt = \int_{0}^{2\pi} 2|\sin(\tfrac{1}{2}t)|\, dt = 2\int_{0}^{2\pi} \sin(\tfrac{1}{2}t)\, dt = -4\cos(\tfrac{1}{2}t)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 8\,.$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt *Zykloide*. Sie ist die Bahn, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden beschreibt.

c) Hier befinden wir uns in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, welche wir als $\mathbb{R}^2$ auffassen. Wegen $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ist die Kurve $\gamma(\varphi) = (\varphi\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, in $\mathbb{R}^2$ gemeint.

Mit

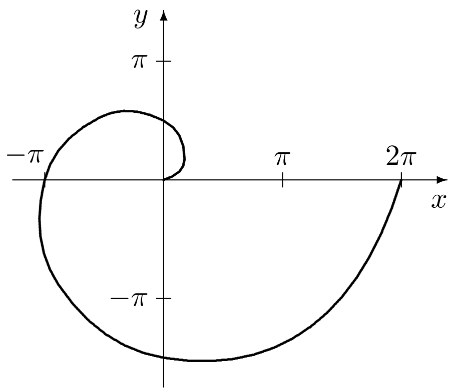
$$\dot\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} (\varphi\cos\varphi)' \\ (\varphi\sin\varphi)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi - \varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi + \varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

ergibt sich für jedes $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \|\dot\gamma(\varphi)\|_2^2 &= (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2 \\ &= \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\,\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\cos\varphi\,\sin\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi \\ &= 1 + \varphi^2 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(\varphi)\|_2\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\varphi^2} + \sqrt{1+\varphi^2}}{2}\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2} \right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2} \right)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{1}{2}\operatorname{Arsinh}(2\pi) + \pi\sqrt{1+4\pi^2}\,. \end{aligned}$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt *Archimedische Spirale*.

Aufgabe 2

Für alle $t \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2]$ gilt

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \neq \vec{0}\,.$$

Also ist γ eine reguläre Kurve. Für jedes $t \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2]$ haben wir

$$\psi(t) := \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{t} \|\dot\gamma(\tau)\|_2\,d\tau = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{t} \sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\,d\tau = \sqrt{2}\arcsin\tau\Big|_{\tau=-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{t} = \sqrt{2}\,(\arcsin t + \tfrac{\pi}{3})\,.$$

Folglich hat die Kurve γ die Länge $L(\gamma) = \psi(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}\,(\pi/4 + \pi/3) = \frac{7\sqrt{2}}{12}\,\pi$. Wegen

$$\psi(t) = s \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tfrac{s}{\sqrt{2}} - \tfrac{\pi}{3} = \arcsin t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \tfrac{\pi}{3})$$

ist $\psi^{-1}\colon [0, \frac{7\sqrt{2}}{12}\,\pi] \to [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $s \mapsto \psi^{-1}(s) = \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3})$. Damit lautet die Parametrisierung von γ bezüglich der Bogenlänge (oder auch natürliche Darstellung von γ)

$$\tilde\gamma(s) = \gamma(\psi^{-1}(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3} \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3}) \\ |\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3})| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3} \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3}) \\ \cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}, \qquad s \in \big[0, \tfrac{7\sqrt{2}}{12}\,\pi\big]\,.$$