

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Die partielle Ableitung von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nach x im Punkt $x^0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Richtungsableitung von f im Punkt x^0 in Richtung des ersten Einheitsvektors $e_1 = (1, 0)$, also

$$\begin{aligned} f_x(x^0) &:= \frac{\partial f}{\partial e_1}(x^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te_1) - f(x^0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + t(1, 0)) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t}. \end{aligned}$$

Für eine feste Zahl $y \in \mathbb{R}$ ist dies gerade der Grenzwert des Differenzenquotienten der Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$. Um die partielle Ableitung von f nach x zu berechnen, können wir also $f(x, y)$ nach x differenzieren, wobei wir y als eine Konstante betrachten.

Entsprechendes erhalten wir für die partielle Ableitung nach y .

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 6x - 4y^2, & f_{yy}(x, y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2, \\ f_{xy}(x, y) &= -8xy + 12y^2, & f_{yx}(x, y) &= -8xy + 12y^2. \end{aligned}$$

Bemerkung: Dass $f_{xy} = f_{yx}$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar, weil f_x und f_y stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind.

- b) Hier haben wir

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xe^{xy} + (x^2 + y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy}, \\ f_y(x, y) &= 2ye^{xy} + (x^2 + y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (2xy + 2)e^{xy} + (x^2y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}, \\ f_{yy}(x, y) &= (2xy + 2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}, \\ f_{yx}(x, y) &= (3x^2 + y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy} \\ &= f_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

Um die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass f auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, weil die partiellen Ableitungen f_x und f_y von f auf $\mathbb{R}^2$ stetig sind. Deshalb gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x, y) &= (Df)(x, y) v = \begin{pmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = e^{xy} \begin{pmatrix} x^2y + 2x + y^3 & x^3 + xy^2 + 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{xy} (x^2y + 2x + y^3 + x^3 + xy^2 + 2y) = e^{xy} (x + y)(x^2 + y^2 + 2). \end{aligned}$$

Wesentlich aufwendiger ist die Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial v}$ mit Hilfe der Definition. Danach gilt für die Richtungsableitung von f im Punkt $x^0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v = (v_1, v_2) = (1, 1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x^0 + tv) - f(x^0) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x + tv_1, y + tv_2) - f(x, y) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(((x + tv_1)^2 + (y + tv_2)^2) e^{(x+tv_1)(y+tv_2)} - (x^2 + y^2) e^{xy} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((x^2 + 2txv_1 + t^2v_1^2 + y^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2) e^{xy} e^{t(yv_1+xv_2)} e^{t^2v_1v_2} - (x^2 + y^2) e^{xy} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((x^2 + y^2 + 2t(xv_1 + yv_2) + t^2(v_1^2 + v_2^2)) e^{xy} e^{t(yv_1+xv_2)} e^{t^2v_1v_2} - (x^2 + y^2) e^{xy} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((x^2 + y^2) e^{xy} (e^{t(yv_1+xv_2)} e^{t^2v_1v_2} - 1) + 2t(xv_1 + yv_2) e^{xy} e^{t(yv_1+xv_2)} e^{t^2v_1v_2} \right. \\ &\quad \left. + t^2(v_1^2 + v_2^2) e^{xy} e^{t(yv_1+xv_2)} e^{t^2v_1v_2} \right).\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)} e^{t^2v_1v_2} - 1)$ setzen wir $\alpha := yv_1 + xv_2$ und $\beta := v_1v_2$ und betrachten die durch $g(t) := e^{\alpha t + \beta t^2}$ gegebene Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(t) = (\alpha + 2\beta t)e^{\alpha t + \beta t^2}$. Nun gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (e^{t(yv_1+xv_2)} e^{t^2v_1v_2} - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(t) - g(0)) = g'(0) = \alpha = yv_1 + xv_2.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) &= (x^2 + y^2) e^{xy} (yv_1 + xv_2) + 2(xv_1 + yv_2) e^{xy} \cdot 1 + 0 \\ &= e^{xy} ((x^2 + y^2)(y + x) + 2(x + y)) \\ &= e^{xy} (x + y)(x^2 + y^2 + 2).\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Alle partiellen Ableitungen von f sind stetig, so dass f differenzierbar ist mit

$$(Df)(x, y) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x \cosh y \\ 6x \sin y & 4y^3 + 3x^2 \cos y \\ -3x^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 3

- a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Stetigkeit von f in $(0, 0)$: Sei $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$ für $k \rightarrow \infty$. Dann gilt auch $m_k := \max\{|x_k|, |y_k|\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, und dies liefert dann

$$|f(x_k, y_k)| \leq \frac{|y_k^3| + |x_k^2 y_k|}{x_k^2 + y_k^2} \leq \frac{m_k^3 + m_k^3}{m_k^2} = 2m_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Das bedeutet $f(x_k, y_k) \rightarrow 0 = f(0, 0)$, womit die Stetigkeit von f auf ganz $\mathbb{R}^2$ bewiesen ist.

- b) Für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$ erhalten wir mit Hilfe der Quotientenregel

$$f_x(x, y) = \frac{-2xy(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2y)2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$f_y(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^2y^2 - x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0, 0)$ dagegen müssen wir auf die Definition der partiellen Ableitung zurückgehen:

$$f_x(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

und

$$f_y(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 - 0}{0 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1.$$

c) Wegen $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0)$ und

$$f_x(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = -\frac{4k^{-4}}{(k^{-2} + k^{-2})^2} = -1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -1 \neq 0 = f_x(0, 0)$$

sowie $(\frac{1}{k}, 0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0)$ und

$$f_y(\frac{1}{k}, 0) = \frac{0 - k^{-4} + 0}{(k^{-2} + 0)^2} = -1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -1 \neq 1 = f_y(0, 0)$$

sind die partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$ nicht stetig.

d) Es sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{(tv_2)^3 - (tv_1)^2 tv_2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_2^3 - t^3 v_1^2 v_2}{t^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

(Insbesondere existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.) Dies soll nun mit

$$\langle \text{grad } f(0, 0), v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = v_2$$

verglichen werden. Es gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \langle \text{grad } f(0, 0), v \rangle$ genau dann, wenn

$$\frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2 v_2 = v_2(v_1^2 + v_2^2) \iff 2v_1^2 v_2 = 0.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

e) Nicht für alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \langle \text{grad } f(0, 0), v \rangle$ erfüllt. Folglich kann die Funktion f in $(0, 0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste diese Gleichung für alle Richtungen v gelten.

Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar. Für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt

$$(Df)(x, y) = (\text{grad } f(x, y))^T = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 & -x^4 + 4x^2 y^2 + y^4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Wir bestimmen zunächst $(Df)(x_0, y_0)$. Da f in (x_0, y_0) differenzierbar ist, gilt

$$(Df)(x_0, y_0)u = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = -1 \quad \text{und} \quad (Df)(x_0, y_0)v = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 2.$$

Setzen wir abkürzend $\alpha := f_x(x_0, y_0)$ und $\beta := f_y(x_0, y_0)$, so ist $(Df)(x_0, y_0) = (\alpha \ \beta)$, also $(Df)(x_0, y_0)u = (\alpha \ \beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha + 2\beta$ und $(Df)(x_0, y_0)v = (\alpha \ \beta)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\alpha + \beta$. Obige Gleichungen liefern daher

$$\alpha + 2\beta = -1 \quad \text{und} \quad -\alpha + \beta = 2.$$

Hieraus erhält man durch Addieren $3\beta = 1$, also $\beta = \frac{1}{3}$, und damit $\alpha = -\frac{5}{3}$. Infolgedessen ist $(Df)(x_0, y_0) = (-\frac{5}{3} \quad \frac{1}{3})$ und aufgrund der Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0) ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0, y_0) = (Df)(x_0, y_0)w = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3}.$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen, ist die gesuchte Richtung h gegeben durch

$$h = \frac{\text{grad } f(x_0, y_0)}{\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|_2} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$