

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik**

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind definiert durch

$$f(x, y) = (x^2, y^2), \quad g(x, y) = (\sin(xy), e^{x+y}), \quad h(x, y) = (xy, 2x, e^y).$$

Berechnen Sie die Ableitungen von f , g und h und ermitteln Sie dann mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $g \circ f$ und $h \circ g$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie $g \circ f$ und $h \circ g$ explizit angeben und ableiten.

Aufgabe 2

Die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch $g(x, y) = \begin{pmatrix} \cosh x \cos y \\ \sinh x \sin y \end{pmatrix}$.

- a) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$ so, dass U durch die Funktion g bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.
- b) Zeigen Sie, dass die Funktion g in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, dass aber g nicht injektiv ist.

Aufgabe 3

- a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0, -2)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x, y)$ die Ableitung $g'(0, 0)$.
- b) Zeigen Sie: Durch die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$$

werden in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ zwei C^1 -Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ mit $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ implizit definiert.

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen in $(0, 0)$.