

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung  
 Elektrotechnik und Informationstechnik  
 Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt**

**Aufgabe 1**

Offensichtlich besitzen alle drei Funktionen auf  $\mathbb{R}^2$  stetige partielle Ableitungen und sind damit auf  $\mathbb{R}^2$  differenzierbar.

Für  $f$  mit den Komponentenfunktionen  $f_1(x, y) := x^2$  und  $f_2(x, y) := y^2$  gilt

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} (f_1)_x(x, y) & (f_1)_y(x, y) \\ (f_2)_x(x, y) & (f_2)_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

und ebenso ergibt sich

$$g'(x, y) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h'(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2 & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x, y) &= g'(f(x, y)) \cdot f'(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \cos(x^2 y^2) & x^2 \cos(x^2 y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2 \cos(x^2 y^2) & 2x^2 y \cos(x^2 y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Funktion  $h \circ g$  erhält man

$$\begin{aligned} (h \circ g)'(x, y) &= h'(g(x, y)) \cdot g'(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & \sin(xy) \\ 2 & 0 \\ 0 & e^{e^{x+y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{x+y}(y \cos(xy) + \sin(xy)) & e^{x+y}(x \cos(xy) + \sin(xy)) \\ 2y \cos(xy) & 2x \cos(xy) \\ e^{x+y}e^{e^{x+y}} & e^{x+y}e^{e^{x+y}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x^2, y^2) = (\sin(x^2 y^2), e^{x^2+y^2}) =: (u_1(x, y), u_2(x, y))$$

erhalten wir

$$(g \circ f)'(x, y) = \begin{pmatrix} (u_1)_x(x, y) & (u_1)_y(x, y) \\ (u_2)_x(x, y) & (u_2)_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 \cos(x^2 y^2) & 2x^2 y \cos(x^2 y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$(h \circ g)(x, y) = h(\sin(xy), e^{x+y}) = (\sin(xy)e^{x+y}, 2 \sin(xy), e^{e^{x+y}}) =: (v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y))$$

und für die Ableitung von  $h \circ g$  ergibt sich

$$(h \circ g)'(x, y) = \begin{pmatrix} (v_1)_x(x, y) & (v_1)_y(x, y) \\ (v_2)_x(x, y) & (v_2)_y(x, y) \\ (v_3)_x(x, y) & (v_3)_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y}(y \cos(xy) + \sin(xy)) & e^{x+y}(x \cos(xy) + \sin(xy)) \\ 2y \cos(xy) & 2x \cos(xy) \\ e^{x+y}e^{e^{x+y}} & e^{x+y}e^{e^{x+y}} \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 2

- a) Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion  $g$  ist stetig differenzierbar, es gilt  $g(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$  und die Matrix  $Dg(\ln 2, \frac{\pi}{2})$  ist regulär. Wir überprüfen diese Voraussetzungen: Die Funktion  $g$  ist stetig differenzierbar, weil alle partiellen Ableitungen von  $g$  stetig sind (vgl. (\*)). Weiter ist

$$g(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2) \cos \frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2) \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn  $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ . Schließlich gilt

$$g'(x, y) = \begin{pmatrix} \sinh x \cos y & -\cosh x \sin y \\ \cosh x \sin y & \sinh x \cos y \end{pmatrix}, \quad (*)$$

und damit ist

$$g'(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

regulär, denn  $\det Dg(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = \cosh^2(\ln 2) \neq 0$  wegen  $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$ .

Nach dem Umkehrsatz gilt

$$(g^{-1})'(0, \frac{3}{4}) = (Dg(g^{-1}(0, \frac{3}{4})))^{-1} = (Dg(\ln 2, \frac{\pi}{2}))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Die Funktion  $g$  ist auf  $\mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar (siehe a)) und für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist

$$\det g'(x, y) = (\sinh x \cos y)^2 + (\cosh x \sin y)^2.$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn  $\sinh x \cos y = 0$  und  $\cosh x \sin y = 0$  gilt. Für  $x > 0$  ist dies wegen  $\sinh x \neq 0$  und  $\cosh x \neq 0$  gleichbedeutend mit  $\cos y = 0$  und  $\sin y = 0$ , kann also nie eintreten. Folglich ist für  $x > 0$  die Matrix  $Dg(x, y)$  stets regulär. Der Umkehrsatz liefert nun die lokale Invertierbarkeit von  $g$  in jedem Punkt  $(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ .

Trotzdem ist die Funktion  $g$  auf  $(0, \infty) \times \mathbb{R}$  nicht injektiv wegen  $g(x, y + 2\pi) = g(x, y)$  für  $(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ .

## Aufgabe 3

- a) Betrachte die Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$ . Dann ist  $f$  auf  $\mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar mit

$$f'(x, y, z) = (-3yz + 3x^2 \quad -3xz - 3y^2 \quad 3z^2 + 4z - 3xy),$$

also  $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 + 4z - 3xy$ . Die Auflösbarkeit der Gleichung  $f(x, y, z) = 0$  nach  $z$  in einer Umgebung von  $(0, 0, -2)$  folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn

$$f(0, 0, -2) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, -2) \neq 0$$

erfüllt sind. Es gilt  $f(0, 0, -2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$  und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, -2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung von  $g$  gilt

$$\begin{aligned} g'(x, y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x, y)}(x, y, g(x, y)) \\ &= -\frac{1}{3g(x, y)^2 + 4g(x, y) - 3xy} \begin{pmatrix} -3yg(x, y) + 3x^2 & -3xg(x, y) - 3y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von  $(0, 0, 1, 1)$  durch die Gleichung

$$f(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad f(x, y, u, v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen  $u$  und  $v$  definiert werden. Offenbar ist  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass  $f(0, 0, 1, 1) = \vec{0}$  gilt; die ersten beiden Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix  $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0, 0, 1, 1)$  regulär ist. Wegen

$$Df(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit  $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0, 0, 1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ . Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn  $\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$ .

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt. Danach gibt es offene Umgebungen  $U \subset \mathbb{R}^2$  von  $(0, 0)$ ,  $V \subset \mathbb{R}^2$  von  $(1, 1)$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $g: U \rightarrow V$  mit  $g(0, 0) = (1, 1)$  und  $f(x, y, g(x, y)) = \vec{0}$  für alle  $(x, y) \in U$ . Definiert man  $u$  als die erste Komponentenfunktion von  $g$  und  $v$  als die zweite Komponentenfunktion von  $g$ , dann leisten  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  das Gewünschte. Außerdem ergibt sich für  $(x, y) \in U$

$$\begin{aligned} g'(x, y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x, y, g(x, y)) \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x, y, u(x, y), v(x, y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \\ &= -\begin{pmatrix} -2u(x, y) & 2v(x, y) \\ -6u(x, y) & 8v(x, y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere für  $(x, y) = (0, 0)$  ist der zweite Faktor die Nullmatrix, so dass dann

$$g'(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Dies bedeutet, dass  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = v_x(0, 0) = v_y(0, 0)$  gilt.

Dieses Ergebnis kann man auch folgendermaßen herleiten: Bilden wir in den beiden Gleichungen  $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$  und  $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$  die partielle Ableitung nach  $x$ , wobei wir  $u = u(x, y)$  und  $v = v(x, y)$  jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \quad \text{und} \quad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0.$$

Einsetzen von  $x = y = 0$  liefert wegen  $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$  die Gleichungen

$$-2u_x(0, 0) + 2v_x(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad -6u_x(0, 0) + 8v_x(0, 0) = 0.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur  $u_x(0, 0) = v_x(0, 0) = 0$ .

Um die partiellen Ableitungen nach  $y$  der implizit definierten Funktionen  $u = u(x, y)$  und  $v = v(x, y)$  zu berechnen, gehen wir analog wie eben vor. Wir bilden in beiden Gleichungen  $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$  und  $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$  die partielle Ableitung nach  $y$  und erhalten

$$2y - 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad \text{und} \quad 4y - 6uu_y + 8vv_y = 0.$$

Einsetzen von  $x = y = 0$  liefert wegen  $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$  die Gleichungen

$$-2u_y(0, 0) + 2v_y(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad -6u_y(0, 0) + 8v_y(0, 0) = 0.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur  $u_y(0, 0) = v_y(0, 0) = 0$ .