

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Das Taylorpolynom zweiten Grades von f in $x^0 = (1, -1, 0)$ ist gegeben durch

$$T_{2,x^0}(h) = f(x^0) + \nabla f(x^0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(x^0) h.$$

Für die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$f_x(x, y, z) = e^z, \quad f_y(x, y, z) = -2y, \quad f_z(x, y, z) = xe^z.$$

Damit erhalten wir $f_x(1, -1, 0) = 1$, $f_y(1, -1, 0) = 2$ und $f_z(1, -1, 0) = 1$. Weiter gilt

$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{xz} = e^z, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = xe^z.$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(x^0) = 0, \quad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$T_{2,x^0}(h_1, h_2, h_3) = 0 + h_1 + 2h_2 + h_3 + \frac{1}{2}(-2h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_3) = h_1 + 2h_2 + h_3 - h_2^2 + \frac{1}{2}h_3^2 + h_1h_3.$$

Schreibt man $h = (x, y, z) - x^0 = (x - 1, y + 1, z)$, so erhält man

$$(x - 1) + 2(y + 1) + z - (y + 1)^2 + \frac{1}{2}z^2 + (x - 1)z.$$

- b) Für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos(x) \sin(y) e^{x-y}$, gilt

$f(x, y)$	$= e^{x-y} \cos x \sin y$	$\Rightarrow$	$f(0, 0)$	$=$	0
$f_x(x, y)$	$= e^{x-y}(\cos x \sin y - \sin x \sin y)$	$\Rightarrow$	$f_x(0, 0)$	$=$	0
$f_y(x, y)$	$= e^{x-y}(\cos x \cos y - \cos x \sin y)$	$\Rightarrow$	$f_y(0, 0)$	$=$	1
$f_{xx}(x, y)$	$= e^{x-y}(-2 \sin x \sin y)$	$\Rightarrow$	$f_{xx}(0, 0)$	$=$	0
$f_{xy}(x, y)$	$= e^{x-y}(\sin x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \cos x \cos y)$	$\Rightarrow$	$f_{xy}(0, 0)$	$=$	1
$f_{yy}(x, y)$	$= e^{x-y}(-2 \cos x \cos y)$	$\Rightarrow$	$f_{yy}(0, 0)$	$=$	-2
$f_{xxx}(x, y)$	$= e^{x-y}(-2 \cos x \sin y - 2 \sin x \sin y)$	$\Rightarrow$	$f_{xxx}(0, 0)$	$=$	0
$f_{xxy}(x, y)$	$= e^{x-y}(-2 \sin x \cos y + 2 \sin x \sin y)$	$\Rightarrow$	$f_{xxy}(0, 0)$	$=$	0
$f_{xyy}(x, y)$	$= e^{x-y}(2 \sin x \cos y - 2 \cos x \cos y)$	$\Rightarrow$	$f_{xyy}(0, 0)$	$=$	-2
$f_{yyy}(x, y)$	$= e^{x-y}(2 \cos x \sin y + 2 \cos x \cos y)$	$\Rightarrow$	$f_{yyy}(0, 0)$	$=$	2

Damit ist für $h = (h_1, h_2)$

$$\begin{aligned} T_{3,(0,0)}(h) &= f(0, 0) + \frac{1}{1!} (h \cdot \nabla) f(0, 0) + \frac{1}{2!} (h \cdot \nabla)^2 f(0, 0) + \frac{1}{3!} (h \cdot \nabla)^3 f(0, 0) \\ &= f(0, 0) + \sum_{j=1}^2 h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0, 0) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0, 0) + \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^2 h_j h_k h_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(0, 0) \\ &= 0 + h_2 + \frac{1}{2}(h_1 h_2 + h_2 h_1 + h_2^2(-2)) + \frac{1}{6}(h_1 h_2 h_2(-2) + h_2 h_1 h_2(-2) + h_2 h_2 h_1(-2) + h_2^3 2) \\ &= h_2 + h_1 h_2 - h_2^2 - h_1 h_2^2 + \frac{1}{3} h_2^3. \end{aligned}$$

Schreiben wir $(x, y) = h + x^0 = h$, so erhalten wir

$$T_{3,(0,0)}(x, y) = y + xy - y^2 - xy^2 + \frac{1}{3} y^3.$$

Aufgabe 2

- a) i) Offenbar gilt $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Man erhält also alle Kandidaten für lokale Extremstellen durch Nullsetzen des Gradienten und kann sie dann mit Hilfe der Hessematrix genauer untersuchen.

Der Gradient von f lautet $\text{grad } f(x, y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)$. Die erste Komponente ist Null genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die stationären Punkte sind also $(0, 0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0, 0)$ indefinit. (Alternative Begründung: $\det H_f(0, 0) = -9 < 0$.) Deshalb hat f in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. (Alternativ: $6 > 0$ und $\det H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 27 > 0$.) Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

- ii) Zweimalige Anwendung der Kettenregel zeigt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Gradient von f lautet

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6x + y^2 \\ 2xy - 2y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die zweite Komponente von $\text{grad } f(x, y)$ verschwindet genau dann, wenn $y(x - 1) = 0$ gilt, also wenn $y = 0$ oder $x = 1$ ist.

Im Fall $y = 0$ ergibt sich für die erste Komponente $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Genau für $x = 0$ oder $x = 2$ ist diese Null.

Im Fall $x = 1$ ergibt sich für die erste Komponente $3 - 6 + y^2 = -3 + y^2$. Genau für $y = \sqrt{3}$ oder $y = -\sqrt{3}$ ist diese Null.

Damit sind $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ alle kritischen Punkte von f .

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 6 & 2y \\ 2y & 2x - 2 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $-6, -2$ und ist somit negativ definit. Daher besitzt f in $(0, 0)$ ein lokales Maximum mit $f(0, 0) = 0$.

$H_f(2, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $6, 2$ und ist somit positiv definit. Daher besitzt f in $(2, 0)$ ein lokales Minimum mit $f(2, 0) = -4$.

$H_f(1, \sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil $\det H_f(1, \sqrt{3}) = -12 < 0$ gilt. Daher liegt in $(1, \sqrt{3})$ ein Sattelpunkt von f vor.

$H_f(1, -\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil $\det H_f(1, -\sqrt{3}) = -12 < 0$ gilt. Daher liegt in $(1, -\sqrt{3})$ ein Sattelpunkt von f vor.

- b) Da Q abgeschlossen und beschränkt ist und f auf Q stetig ist, nimmt f auf Q Maximum und Minimum an.

Wir betrachten f zunächst im Inneren von Q , also auf $(0, 5) \times (0, 5)$. Es ist

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy - 4y - 4x \\ x^2 - 4x + 4 \end{pmatrix}.$$

Gilt $\text{grad } f(x, y) = (0, 0)$, so liefert die zweite Komponente $(x-2)^2 = 0$, d.h. $x = 2$. Für $x = 2$ lautet die erste Komponente -8 . Diese ist stets $\neq 0$, so dass es keine kritischen Punkte von f gibt. Daher besitzt f keine lokalen Extremstellen in $(0, 5) \times (0, 5)$ und die Extrema von f werden auf dem Rand von Q angenommen. Wir untersuchen f auf dem Rand von Q :

$x = 0$: $f(0, y) = 4y - 2$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(0, 5) = 18$ und minimal für $y = 0$ mit $f(0, 0) = -2$.

$x = 5$: $f(5, y) = 9y - 52$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(5, 5) = -7$ und minimal für $y = 0$ mit $f(5, 0) = -52$.

$y = 0$: $f(x, 0) = -2x^2 - 2 =: g_1(x)$. Wegen $g_1'(x) = -4x \leq 0$ für $x \in [0, 5]$ ist g_1 auf $[0, 5]$ monoton fallend. Daher sind 0 und 5 die Extremstellen von $g_1 = f(\cdot, 0)$ mit $f(0, 0) = -2$ und $f(5, 0) = -52$.

$y = 5$: $f(x, 5) = 3x^2 - 20x + 18 =: g_2(x)$. Wegen $g_2'(x) = 6x - 20 = 0 \iff x = \frac{10}{3} \in (0, 5)$ müssen wir $f(0, 5) = 18$, $f(\frac{10}{3}, 5) = -\frac{46}{3}$ und $f(5, 5) = -7$ berücksichtigen.

Insgesamt erhalten wir durch Vergleich der Funktionswerte

$$\max_{(x,y) \in Q} f(x, y) = 18 \quad \text{und} \quad \min_{(x,y) \in Q} f(x, y) = -52.$$

Aufgabe 3

Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates

$$f(x, y) := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$

Die Nebenbedingung ist durch die Kreislinie

$$h(x, y) := x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$$

gegeben. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte

$$\text{rg } Dh(x, y) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2(y+1) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 1$$

überprüft werden. Diese Bedingung ist nur im Punkt $(1, -1)$ (Kreismittelpunkt) nicht erfüllt, der wegen $h(1, -1) = -1$ nicht auf der Kreislinie liegt und somit nicht Extremalkandidat ist.

Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda h(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 + \lambda((x-1)^2 + (y+1)^2 - 1)$$

und die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\text{grad } L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq -1$. Daher erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \iff x = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \quad \text{und} \quad y(2+2\lambda) = 2 - 2\lambda \iff y = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

Also ist $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $2x^2 - 4x + 1 = 0$, also

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und damit} \quad y_{1,2} = -x_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich sind $P_1 := (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_2 := (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ Kandidaten für Extrema. Da Maximum und Minimum der stetigen Funktion f auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(P_1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt P_1 der maximale Abstand $1 + 2\sqrt{2}$ und im Punkt P_2 der minimale Abstand $2\sqrt{2} - 1$ angenommen.

Aufgabe 4

Da die Menge S beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$h(x, y, z) := \begin{pmatrix} h_1(x, y, z) \\ h_2(x, y, z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x, y, z) = (0, 0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von f auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl f als auch h sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$Dh(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

gilt $\text{rg } Dh(x, y, z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch die Nebenbedingungen $h_1(x, y, z) = 0$ und $h_2(x, y, z) = 0$ nicht erfüllen, denn aus $x + y + z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ im Widerspruch zu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &:= f(x, y, z) + \lambda_1 h_1(x, y, z) + \lambda_2 h_2(x, y, z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x + y + z) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\text{grad } L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$\begin{aligned} 5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x &= 0, & 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y &= 0, & -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z &= 0, \\ x + y + z &= 0, & x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x + y + z) = 0,$$

wegen $x + y + z = 0$ also $\lambda_1 = -1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4 + 2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y = 0$ folgt. Aus $x + y + z = 0$ ergibt sich dann $z = -x$ und in $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ eingesetzt folgt $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ bzw. $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge S das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.