Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S.Wugalter

Sommersemester 2018
20.06.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x, y, z) = (z^2 - 1)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Bestimmen Sie Minimum und Maximum von f auf der Menge

$$B = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\big\}\,.$$

Hinweis: Wenn Sie f auf dem Rand von B untersuchen, dann können Sie dies vereinfachen, indem Sie f dort geeignet darstellen.

Aufgabe 2

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x, y) = x + xy\,.$$

Begründen Sie, dass f auf der Menge

$$S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\big\}$$

Maximum und Minimum annimmt, und berechnen Sie diese.

b) Hat die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \;\; g(x, y) = x^2 + xy\,,$$

in $\mathbb{R}^2$ ein lokales Extremum?

Aufgabe 3

Das Vektorfeld $\vec{g}\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\,(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)\,.$$

Bestimmen Sie die Rotation und die Divergenz von $\vec{g}$.

Aufgabe 4

Wir führen auf $\mathbb{R}^2$ Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein. Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $v(r, \varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

a) Stellen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial r}$ und $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von u dar.

b) Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\,(r, \varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\,(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\,(r, \varphi)\,.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 5

a) Die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f\,ds \qquad \text{für} \quad f(x, y, z) := 2z - \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

b) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

i) $\vec{v}(x, y) = (e^x, xy)\,, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

ii) $\vec{v}(x, y, z) = (y, -z, x)\,, \qquad \gamma(t) = (\sinh t, \cosh t, \sinh t)\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant \ln 2$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2, 3 und 5**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.