

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Die Funktion f ist auf der Menge B stetig. Da B abgeschlossen und beschränkt ist, besitzt f auf B sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.

Wir betrachten zuerst alle Punkte im Inneren von B , in denen f differenzierbar ist. Das sind alle $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \in (0, 1)$. Nimmt f an solch einer Stelle ein lokales Extremum an, so muss gelten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \nabla f(\vec{v}) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \begin{pmatrix} (z^2 - 1)x \\ (z^2 - 1)y \\ 2z\|\vec{v}\|^2 + z^3 - z \end{pmatrix}.$$

Wegen $z^2 < 1$ sind die ersten beiden Zeilen genau für $x = y = 0$ erfüllt. Mit diesen Werten von x und y ist $\|\vec{v}\|^2 = z^2$ und damit $2z\|\vec{v}\| + z^3 - z = z(3z^2 - 1)$. Also gilt die dritte Zeile genau für $z = 1/\sqrt{3}$ oder $z = -1/\sqrt{3}$ (Beachte: $x = y = z = 0$ wird in diesem Fall nicht berücksichtigt). Daher müssen wir im Inneren die Punkte $(0, 0, 1/\sqrt{3})$ und $(0, 0, -1/\sqrt{3})$ untersuchen sowie den Nullpunkt, den wir zuvor ausgeschlossen haben:

$$f(0, 0, 0) = 0, \quad f(0, 0, -1/\sqrt{3}) = f(0, 0, 1/\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Nun bleibt noch der Rand ∂B von B zu untersuchen. Dort gilt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und damit $f(x, y, z) = (z^2 - 1) =: g(z)$ für $z \in [-1, 1]$. Wir sehen sofort, dass die Funktion g für $z = -1$ oder $z = 1$ ihr Maximum 0 und für $z = 0$ ihr Minimum -1 annimmt, welche damit auch die Extrema von f auf dem Rand von B sind. Es folgt: -1 ist das Minimum von f auf B und 0 das Maximum. Ohne die Vereinfachung könnten wir auch folgendermaßen vorgehen:

Ist $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$, definiert, so gilt $\partial B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h(x, y, z) = 0\}$. Wir berechnen die Extrema von f auf ∂B unter Verwendung der Multiplikatorenregel von Lagrange: h ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, f hingegen nur auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, allerdings erfüllt $\vec{0}$ die Nebenbedingung $h(\vec{0}) = 0$ nicht. Weiter gilt $h'(x, y, z) = (2x \ 2y \ 2z)$, damit ist $\text{rg } h'(x, y, z) = 1$ für alle $(x, y, z) \in \partial B$. Setzen wir $L(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) + \lambda h(x, y, z)$, so gibt es nach der Multiplikatorenregel von Lagrange für jeden Punkt $\vec{v}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, in dem f ein Extremum auf ∂B hat, ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} f_x + \lambda_0 h_x \\ f_y + \lambda_0 h_y \\ f_z + \lambda_0 h_z \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_0^2 - 1)x_0/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 x_0 \\ (z_0^2 - 1)y_0/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 y_0 \\ 2z_0\|\vec{v}_0\| + (z_0^3 - z_0)/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 z_0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem in x_0, y_0, z_0, λ_0 muss man nun lösen. Die globalen Extrema erhält man durch Vergleich der Funktionswerte an den Punkten (x_0, y_0, z_0) , die das Gleichungssystem erfüllen.

Aufgabe 2

- a) Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Da S abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt f auf S Maximum und Minimum an. Zu deren Bestimmung verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange: Ist

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

definiert, dann gilt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$ sowie

$$h'(x, y) = (2x \quad 2y)$$

und $\text{rg } h'(x, y) < 1$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für $(x, y) \in S$ nicht vorkommt. Also gilt $\text{rg } h'(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in S$.

Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, L(x, y, \lambda) = x + xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Dann gilt

$$\text{grad } L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + y + 2\lambda x \\ x + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

und $\text{grad } L(x, y, \lambda) = \vec{0}$ ist äquivalent zu:

$$1 + y + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$x + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

1. Fall: $y = 0$. Dann folgt aus Gleichung (2): $x = 0$; jedoch genügt $(x, y) = (0, 0)$ der Gleichung (3) nicht.

2. Fall: $y \neq 0$.

Gilt $x = 0$, so führt (1) auf $y = -1$. Für $(x, y) = (0, -1)$ sind sowohl Gleichung (2) (mit $\lambda = 0$) als auch (3) erfüllt.

Sei nun $x \neq 0$. In diesem Fall liefern (1) bzw. (2)

$$\lambda = -\frac{y+1}{2x} \quad \text{sowie} \quad \lambda = -\frac{x}{2y}.$$

Also ist

$$\frac{y+1}{2x} = \frac{x}{2y} \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 + y = x^2.$$

Setzt man dies in (3) ein, so erhält man

$$(y^2 + y) + y^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y^2 + y - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = -1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{2}.$$

Für $y = -1$ hat man wegen (3): $x^2 = 0$, d.h. $x = 0$. Für $y = \frac{1}{2}$ gilt nach (3)

$$x^2 + \frac{1}{4} - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{3}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgrund von

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{und} \quad f(0, -1) = 0$$

besitzt f auf S das Maximum $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ und das Minimum $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

b) Es gilt

$$\text{grad } g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x \end{pmatrix}.$$

Ist $\text{grad } g(x, y) = (0, 0)$, so folgt wegen der zweiten Komponente $x = 0$ und daher $y = 0$. Demnach ist $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von g , also der einzige Kandidat für eine lokale Extremstelle von g . Die Hessematrix

$$H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist indefinit, weil $\det H_g(0, 0) = -1 < 0$ gilt. Daher besitzt g in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt und kein lokales Extremum.

Aufgabe 3

Schreibe $\vec{g} = f\vec{v}$ mit

$$f(x, y, z) := \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mit der Produktregel aus 19.21 erhalten wir $\operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \nabla \times (f\vec{v}) = f(\nabla \times \vec{v}) + (\nabla f) \times \vec{v}$. Offenbar ist $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ und $\partial_1 f(x, y, z) = -2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} + 8x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3}$; die anderen partiellen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{8 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad (\nabla f) \times \vec{v} = \vec{0}.$$

Folglich ist $\operatorname{rot} \vec{g} = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{g} &= \nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot (f\vec{v}) = f(\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla f) \cdot \vec{v} \\ &= 3f + \frac{8 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Für $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ gilt

$$v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = u(g(r, \varphi)) = u \circ g(r, \varphi)$$

mit $g: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$v'(r, \varphi) = u'(g(r, \varphi)) \cdot g'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} u_x(g(r, \varphi)) & u_y(g(r, \varphi)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Mit $v'(r, \varphi) = (v_r(r, \varphi) \quad v_\varphi(r, \varphi))$ erhält man für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} v_r(r, \varphi) &= \cos \varphi u_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + \sin \varphi u_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \\ v_\varphi(r, \varphi) &= -r \sin \varphi u_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + r \cos \varphi u_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi). \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} v_{rr}(r, \varphi) &= \cos \varphi (u_{xx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi + u_{yx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi) \\ &\quad + \sin \varphi (u_{xy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi + u_{yy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi) \\ &= \cos^2 \varphi u_{xx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + 2 \sin \varphi \cos \varphi u_{xy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + \sin^2 \varphi u_{yy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} v_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= -r \cos \varphi u_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ &\quad - r \sin \varphi (u_{xx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (-r \sin \varphi) + u_{yx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \cos \varphi) \\ &\quad - r \sin \varphi u_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ &\quad + r \cos \varphi (u_{xy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (-r \sin \varphi) + u_{yy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \cos \varphi) \\ &= -r \cos \varphi u_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - r \sin \varphi u_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ &\quad + r^2 \sin^2 \varphi u_{xx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi u_{xy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ &\quad + r^2 \cos^2 \varphi u_{yy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r, \varphi) &= v_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r} v_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \\ &= (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) (u_{xx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + u_{yy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi)) \\ &= u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = \Delta u(x, y) \end{aligned}$$

mit $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$.

Aufgabe 5

- a) Mit $\dot{\gamma}(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}\|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} \\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{2 + t^2}.\end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f \, ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \left(2t - \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t}\right) \sqrt{2 + t^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{2 + t^2} \, dt = \left[\frac{1}{3}(2 + t^2)^{3/2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}((2 + 4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{2}((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1).\end{aligned}$$

- b) i) Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos t} \sin t + \sin t \cos^2 t) \, dt = [e^{\cos t} - \frac{1}{3} \cos^3 t]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

- ii) Auch hier benutzen wir die Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{\ln 2} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ \sinh t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} \, dt \\ &= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t \cosh t) \, dt = \int_0^{\ln 2} (1 + \sinh t \cosh t) \, dt \\ &= \ln 2 + \left[\frac{1}{2} \sinh^2 t\right]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \frac{1}{2} \sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\right)^2 = \ln 2 + \frac{9}{32}.\end{aligned}$$