

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Die Funktionen sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung aus Satz 2 in 20.4 erfüllt ist. (Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet.) Schreibe $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$\partial_2 v_3(x, y, z) = 2y + 3z^2 x^2, \quad \partial_3 v_2(x, y, z) = 3z^2 x^2 \neq \partial_y v_3(x, y, z)$$

ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld, d. h. es gibt kein C^1 -Skalarfeld $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$.

Für $\vec{w} =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$\partial_2 w_3 = e^z = \partial_3 w_2, \quad \partial_3 w_1 = 2z = \partial_1 w_3, \quad \partial_1 w_2 = 0 = \partial_2 w_1.$$

Somit ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x, y, z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert: Es ist

$$f(x, y, z) = z^2 x + c(y, z)$$

mit einer gewissen Funktion $c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante“ kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x, y, z) = \partial_y c(y, z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y, z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x, y, z) = z^2 x + ye^z + d(z),$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x, y, z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von $\vec{w}$:

$$f(x, y, z) = z^2 x + ye^z.$$

- b) Bei $\vec{v}$ müssen wir das Kurvenintegral nach Definition ausrechnen:

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf das oben berechnete Potential f zurückgreifen:

$$\int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{s} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(0, 1, 0) - f(1, 0, 0) = 1 - 0 = 1.$$

Aufgabe 2

Die Menge $G := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0 \}$ ist einfach zusammenhängend und die Funktion $\vec{v}$ ist darauf stetig differenzierbar. (Sämtliche partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ sind auf G stetig!) Daher gilt:

$\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung aus Satz 2 in 20.4 erfüllt ist, wenn also $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$. Es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - b \\ -3 - c \\ 1 - a \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn $a = 1$, $b = 1$ und $c = -3$ gilt. In diesem Falle können wir von

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y - 3z \\ x + 2y + z \\ -3x + y + 4z \end{pmatrix}$$

ein Potential $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmen. Da $\partial_x g(x, y, z) = x + y - 3z$ gelten soll, ergibt sich

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + c(y, z)$$

mit einer gewissen Funktion c . Es folgt $\partial_y g(x, y, z) = x + \partial_y c(y, z)$, und dies soll $= x + 2y + z$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(y, z) = 2y + z$, also $c(y, z) = y^2 + yz + d(z)$ mit einer gewissen Funktion d . Somit:

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + d(z).$$

Hieraus folgt $\partial_z g(x, y, z) = -3x + y + d'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $d'(z) = 4z$. Wir wählen $d(z) = 2z^2$ und haben damit das Potential

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + 2z^2.$$

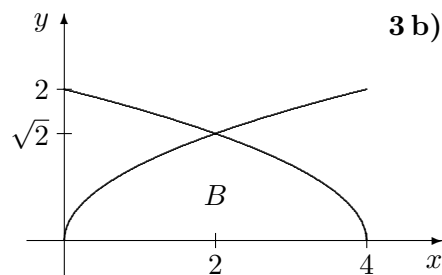
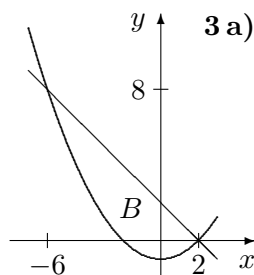
Aufgabe 3

- a) Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $y = 2 - x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 2 - x$, also $x^2 + 4x - 12 = 0$ bestimmen. Dies sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt von B ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_B d(x, y) &= \int_{-6}^2 \int_{\frac{1}{4}x^2 - 1}^{2-x} dy \, dx = \int_{-6}^2 ((2-x) - (\frac{1}{4}x^2 - 1)) \, dx = \int_{-6}^2 (-\frac{1}{4}x^2 - x + 3) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-6}^2 = -\frac{2}{3} - 2 + 6 - (18 - 18 - 18) = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

- b) Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze). Es gilt

$$\iint_B d(x, y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} dx \, dy = \int_0^{\sqrt{2}} ((4-y^2) - y^2) \, dy = \left[4y - \frac{2}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$



Aufgabe 4

Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale mit Hilfe von Satz 1 in 20.5 berechnen.

Es gilt

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1] \times [0,1]} (xy + y^2) d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 (xy + y^2) dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Da der Integrand jeweils eine stetige Funktion ist, kann man die Integrationsreihenfolge nach Satz 2 in 20.5 vertauschen.

a) Es gilt

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^x dy e^{x^2} dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2} dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

b) Wir spalten den Integrationsbereich B in zwei Teile B_1, B_2 auf (siehe Skizze) und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{y^2+1}^{y^2+1} x^2 y dx dy &= \iint_{B_1} x^2 y d(x, y) + \iint_{B_2} x^2 y d(x, y) \\ &= \int_0^1 \int_0^x x^2 y dy dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^x dx + \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=\sqrt{x-1}}^1 dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^4 dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^2 (x-1) \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{10} x^5 \right]_{x=0}^1 + \left[-\frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=1}^2 = \frac{1}{10} + \left(-2 + \frac{8}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \right) = \frac{67}{120}.\end{aligned}$$

