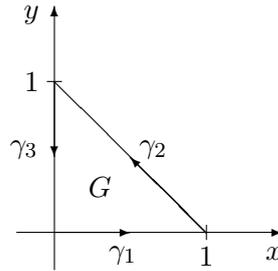


**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Zunächst berechnen wir $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, 0), \\ \gamma_2: [1, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (2-t, t-1), \\ \gamma_3: [2, 3] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (0, 3-t). \end{aligned}$$

Dann haben $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die in der Skizze gekennzeichneten Träger und es gilt $\gamma_1(1) = (1, 0) = \gamma_2(1)$ sowie $\gamma_2(2) = (0, 1) = \gamma_3(2)$. Der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ ist gegeben durch $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (im Sinne von Bemerkung 20.1 (d)). Deshalb ist

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t \cdot 0 \\ t^2 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_1^2 \begin{pmatrix} (2-t)^2 + (2-t)(t-1) \\ (2-t)^2(t-1) - (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_1^2 \begin{pmatrix} 2-t \\ t^3 - 6t^2 + 10t - 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_1^2 (t^3 - 6t^2 + 11t - 7) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 7t \right]_1^2 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_2^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -(3-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_2^3 (3-t)^2 dt = \left[-\frac{1}{3}(3-t)^3 \right]_2^3 = \frac{1}{3}.$$

Zusammen folgt

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Dann ist G offen und konvex und somit ein Gebiet. Außerdem seien $v_1(x, y) := x^2 + xy$ sowie $v_2(x, y) := x^2y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf \mathbb{R}^2 stetig differenzierbar, so dass die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes 20.6 erfüllt sind. Dieser liefert

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G (\partial_1 v_2(x, y) - \partial_2 v_1(x, y)) d(x, y) = \iint_G (2xy - x) d(x, y).$$

Da der Integrand stetig ist, gilt nach Satz 2 in 20.5

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy - x) dy dx = \int_0^1 [xy^2 - xy]_{y=0}^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 (x(1-x)^2 - x(1-x)) dx = \int_0^1 (x^3 - x^2) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

- a) Für $(x, y, z) \in A$ gilt nach Definition der Menge $x \in [1, 2]$ sowie $0 \leq x^2 - y^2$, also $y^2 \leq x^2$, d.h. $|y| \leq |x| = x$ wegen $x > 0$. Mit

$$A_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2], -x \leq y \leq x\}$$

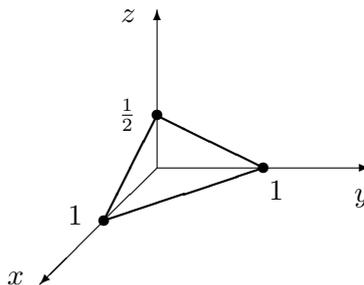
lässt sich A folgendermaßen schreiben

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A_0, 0 \leq z \leq x^2 - y^2\}.$$

[In der Notation von Abschnitt 21.2: $B_0 = A_0$, $a = 1$, $b = 2$, $u(x) = -x$, $v(x) = x$, $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = x^2 - y^2$.] Da der Integrand $f(x, y, z) = 1$ stetig ist, erhält man nach 21.2

$$\begin{aligned} \text{vol}(A) &= \iiint_A d(x, y, z) = \int_1^2 \int_{-x}^x \int_0^{x^2-y^2} dz dy dx = \int_1^2 \int_{-x}^x (x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_1^2 [x^2y - \frac{1}{3}y^3]_{y=-x}^x dx = \int_1^2 \frac{4}{3}x^3 dx = [\frac{1}{3}x^4]_{x=1}^2 = \frac{1}{3}(16 - 1) = 5. \end{aligned}$$

- b)



Die Menge B wird von den Koordinatenebenen und von der Ebene durch die drei Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, \frac{1}{2})$ begrenzt (siehe Skizze). Damit ist $(x, y, z) \in B$ äquivalent zu

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{2}(1 - x - y).$$

Bei B handelt es sich also um

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_0, 0 \leq z \leq \frac{1}{2}(1 - x - y)\},$$

wobei $B_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$

Da $(x, y, z) \mapsto \sin(z)$ auf B stetig ist, ergibt sich für das Integral nach 21.2

$$\begin{aligned} \iiint_B \sin z \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-x-y)/2} \sin z \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} [-\cos z]_{z=0}^{(1-x-y)/2} \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(-\cos\left(\frac{1-x-y}{2}\right) + 1 \right) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 [2 \sin\left(\frac{1-x-y}{2}\right) + y]_{y=0}^{1-x} \, dx = \int_0^1 \left(1 - x - 2 \sin\left(\frac{1-x}{2}\right) \right) \, dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2}x^2 - 4 \cos\left(\frac{1-x}{2}\right) \right]_{x=0}^1 = \left(1 - \frac{1}{2} - 4 \cos 0 \right) + 4 \cos\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2} + 4 \cos\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Seien $a, b, c > 0$. Um

$$\text{vol}(E) := \iiint_E d(x, y, z)$$

für die Menge

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

zu berechnen, führen wir die Substitution $(x, y, z) = (au, bv, cw)$ durch. Die Substitutionsfunktion lautet also $\Phi(u, v, w) = (au, bv, cw)$ und hat die Ableitung

$$\Phi'(u, v, w) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

mit $\det \Phi'(u, v, w) = abc > 0$. Ist $K := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$ gesetzt, so gilt $\Phi(K) = E$, denn

$$(u, v, w) \in K \iff \left(\frac{au}{a}\right)^2 + \left(\frac{bv}{b}\right)^2 + \left(\frac{cw}{c}\right)^2 \leq 1 \iff (au, bv, cw) = \Phi(u, v, w) \in E.$$

Daher erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel 21.3

$$\iiint_E d(x, y, z) = \iiint_K abc \, d(u, v, w) = abc \iiint_K d(u, v, w).$$

Nach Beispiel 21.2 (1) (mit $r = 1$) beträgt das Volumen von K : $\frac{4}{3}\pi$, so dass

$$\iiint_E d(x, y, z) = abc \frac{4\pi}{3}$$

folgt. Alternativ liefern Kugelkoordinaten $(u, v, w) = (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ mit $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ für $\text{vol}(K)$ ebenfalls

$$\iiint_K d(u, v, w) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^2 \, d\varphi \, dr = \int_0^1 4\pi r^2 \, dr = \frac{4\pi}{3}.$$