Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S.Wugalter

Sommersemester 2018
07.07.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ mit der Oberfläche $\mathcal{F}$ sowie das Vektorfeld $\vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{w}(x, y, z) = (z, y, z+1)^T$. Berechnen Sie den Fluß $\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{w}\, d\vec{\sigma}$ des Vektorfeldes $\vec{w}$ durch die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Kegels K nach außen.

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \left\{(x, y, x^2 + y^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

Aufgabe 3

Es sei $\partial\mathcal{F}$ der positiv orientierte Rand der Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{(x, y, y^2 - x^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 3\right\}.$$

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.

Aufgabe 4

Die Oberfläche des Zylinders $Z := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$ wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet, und es sei

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do$$

(wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) mittels der Definition des Oberflächenintegrals;

b) unter Verwendung des Divergenzsatzes.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 3 und 4**. Die Aufgabe 1 wird in Tutorien behandelt.