Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

$\vec{N}$ sei stets die Einheitsnormale auf ∂K, die ins Äußere von K gerichtet ist. Für den Fluß des Vektorfeldes $\vec{w}$ durch die Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen gilt

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do.$$

Die Oberfläche ∂K besteht aus dem Kegelmantel und dem Grundkreis. Wir parametrisieren zunächst den Kegelmantel

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\, z \geqslant 0\right\}$$

durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2-r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2]\times[0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach außen. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\vec{w}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big) &= \begin{pmatrix} 2-r \\ r\sin\varphi \\ 3-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} = (2-r)r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3-r)r \\ &= (2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2).\end{aligned}$$

Für den Fluß von $\vec{w}$ durch die Mantelfläche M nach außen erhält man

$$\begin{aligned}\iint\limits_M \vec{w}\cdot\vec{N}\,do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{w}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)}{\|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\|}\, \|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi) \\ &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{w}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big((2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2)\big)\, d\varphi\, dr \\ &= \int_0^2 \big(\pi r^2 + (3r-r^2)2\pi\big)\, dr = \Big[\pi\,\frac{r^3}{3} + \Big(\frac{3}{2}\,r^2 - \frac{r^3}{3}\Big)\,2\pi\Big]_0^2 = \frac{28}{3}\,\pi.\end{aligned}$$

Eine Parametrisierung des Grundkreises

$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \leqslant 4,\, z = 0\right\}$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2]\times[0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach innen. Wegen

$$\vec{w}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = -r$$

ergibt sich für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Grundfläche G nach außen

$$\begin{aligned} \iint\limits_G \vec{w} \cdot \vec{N}\, do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} w(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -r\, d\varphi\, dr = -\int_0^2 2\pi r\, dr = -4\pi. \end{aligned}$$

Der Fluß von $\vec{w}$ durch die gesamte Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen beträgt somit

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do = \iint\limits_M \vec{f} \cdot \vec{N}\, do + \iint\limits_G \vec{w} \cdot \vec{N}\, do = \frac{28}{3}\pi - 4\pi = \frac{16}{3}\pi.$$

Bemerkung: Alternativ kann man $\iint_{\partial K} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do$ auch mit dem Divergenzsatz im $\mathbb{R}^3$ (Diesen nennt man auch den *Gaußschen Integralsatz.*) berechnen:

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_K \nabla \cdot \vec{f}\, d\tau = \iiint\limits_K 2\, d(x,y,z),$$

wobei wir hier $d\tau$ für $d(x,y,z)$ geschrieben haben. Mit Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

lässt sich K charakterisieren durch

$$r \in [0,2], \qquad \varphi \in [0,2\pi], \qquad z \in [0, 2-r],$$

so dass folgt

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\partial K} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do &= 2 \iiint\limits_K d(x,y,z) = 2 \int_0^2 \int_0^{2-r} \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dz\, dr \\ &= 4\pi \int_0^2 \int_0^{2-r} r\, dz\, dr = 4\pi \int_0^2 (2r - r^2)\, dr = 4\pi \big[r^2 - \tfrac{1}{3} r^3\big]_0^2 = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die Fläche $\mathcal{F} = \big\{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\big\}$ liegt in expliziter Darstellung vor mit $f(x,y) = x^2 + y^2$ bzw. in Parameterdarstellung $\mathcal{F} = \{\vec{g}(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$ mit

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{F}) &= \iint\limits_{\mathcal{F}} do = \iint\limits_{B} \|\partial_x \vec{g}(x,y) \times \partial_y \vec{g}(x,y)\|\, d(x,y) = \iint\limits_{B} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \right\| d(x,y) \\
&= \iint\limits_{B} \left\| \begin{pmatrix} -\partial_x f(x,y) \\ -\partial_y f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| d(x,y) = \iint\limits_{B} \sqrt{(\partial_x f(x,y))^2 + (\partial_y f(x,y))^2 + 1}\, d(x,y) \\
&= \iint\limits_{B} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, d(x,y).
\end{aligned}$$

Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$A(\mathcal{F}) = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{4r^2+1}\, r\, d(r,\varphi) = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr = 2\pi \left[\tfrac{1}{12}\,(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^1 = \tfrac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1).$$

Aufgabe 3

Eine Parametrisierung der Fläche $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 - u^2 \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in U := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 3 \,\}\,.$$

Der Stokessche Integralsatz liefert

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{\mathcal{F}} \left(\nabla \times \vec{v}\,\right) \cdot d\vec{o} = \iint\limits_{U} \left(\nabla \times \vec{v}\,\right)\big(\vec{g}(u,v)\big) \cdot \big(\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\big)\, d(u,v)\,.$$

Nun ist

$$\partial_u \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 1 - (-2) \\ 9 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{U} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} d(u,v) = \iint\limits_{U} (8u - 6v + 14)\, d(u,v)\,;$$

und mit Polarkoordinaten (U ist die Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{3}$) erhält man unter Berücksichtigung von $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (8r\cos\varphi - 6r\sin\varphi + 14)\, r\, d\varphi\, dr = \int_0^{\sqrt{3}} 28\pi r\, dr \\
&= 28\pi \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_{r=0}^{\sqrt{3}} = 28\pi \cdot \tfrac{3}{2} = 42\pi\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 0)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ u\cos^2 v + u\sin^2 v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ u\end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0,0,-1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v)$ durch die Norm $\|\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v)\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = 0$, denn

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = v_3\big(\vec{g}(u,v)\big)\,(-1) = 0\,.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{g}(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u,v) \in U := [0,2\pi] \times [0,1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix}-\sin u\\ \cos u\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix}.$$

Dies ist auch schon die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$. Wegen

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix}\cos^3 u\\ \cos^2 u\,\sin u\\ v\cos^2 u\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u\,\sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_2} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iint\limits_{U} \cos^2 u\,\underbrace{\|\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v)\|}_{=\cos^2 u+\sin^2 u=1}\,d(u,v) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2 u\,dv\,du = \int_0^{2\pi}\cos^2 u\,du = \pi\,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 1)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ liefert $\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v) = (0,0,u)$. Es ist $\vec{N} = (0,0,1)$ und damit

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = v_3\big(\vec{g}(u,v)\big) = u^2\cos^2 v\,.$$

Somit erhalten wir

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_3} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iint\limits_{U} u^2\cos^2 v\,\underbrace{\|\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v)\|}_{=|u|=u,\text{ da } u\geqslant 0}\,d(u,v) = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^3\cos^2 v\,dv\,du$$

$$= \left(\int_0^1 u^3\,du\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 v\,dv\right) = \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Insgesamt ergibt sich schließlich

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \sum_{k=1}^{3}\iint\limits_{\mathcal{F}_k} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = 0 + \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz bzw. dem Divergenzsatz ist

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iiint\limits_{Z} (\nabla\cdot\vec{v}\,)\,d(x,y,z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x,y,z) = \partial_x(x^3) + \partial_y(x^2 y) + \partial_z(x^2 z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, wobei $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $z \in [0,1]$, folgt

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{Z} 5x^2\, d(x,y,z) &= \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]} 5(r\cos\varphi)^2\, r\, d(r,\varphi,z) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^3 \cos^2\varphi\, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 5r^3 \cos^2\varphi\, d\varphi\, dr \\
&= 5\left(\int_0^1 r^3\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) = \tfrac{5}{4}\pi\,.
\end{aligned}$$