Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

Sommersemester 2019
25.04.2019

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Gegeben sei das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u' &= 8u - 6v, \\ v' &= 9u - 7v. \end{aligned}$$

Stellen Sie dieses mit Hilfe einer geeigneten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in der Form

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1}$$

dar. Begründen Sie, dass A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, und definieren Sie Funktionen $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ so, dass (1) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

ist. Da D Diagonalgestalt besitzt, erhält man zwei entkoppelte Gleichungen, aus denen sich $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ berechnen lassen. Bestimmen Sie damit die Lösungen des Systems (1).

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine reguläre Matrix S so an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 5

a) Finden Sie Matrizen mit den folgenden Eigenschaften:

- **i)** $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und A hat nur den Eigenwert 5.
- **ii)** $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und B hat paarweise verschiedene reelle Eigenwerte.
- **iii)** $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda$ ist das charakteristische Polynom von C.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann $\lambda^2 + 5$ ein Eigenwert von $A^2 + 5I_n$ ist.

c) Ist die folgende Aussage wahr?
Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.

Hinweis In der großen Übung am 07.05. werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2 und 3**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.