Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2019
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Das System

$$u' = 8u - 6v,$$
$$v' = 9u - 7v$$

ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir zeigen, dass A diagonalisierbar ist. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -6 \\ 9 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 9 \cdot 6 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Damit sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(-1) = \mathrm{Kern}(A + I_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

und

$$E_A(2) = \mathrm{Kern}(A - 2I_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Da die Eigenvektoren $(2,3), (1,1)$ von A eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden, ist A diagonalisierbar und für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D,$$

woraus $A = SDS^{-1}$ folgt. Außerdem ist

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = SDS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn

$$S^{-1} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = DS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bzw. wenn

$$\begin{pmatrix} -u' + v' \\ 3u' - 2v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u + v \\ 3u - 2v \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Sind $\widetilde{u} := -u + v$ und $\widetilde{v} := 3u - 2v$, also $\begin{pmatrix}\widetilde{u}\\ \widetilde{v}\end{pmatrix} := S^{-1}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$, gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\widetilde{u}'\\ \widetilde{v}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{u}\\ \widetilde{v}\end{pmatrix} \quad &\Longleftrightarrow \quad \widetilde{u}' = -\widetilde{u} \ \text{ und } \ \widetilde{v}' = 2\widetilde{v}\\ &\Longleftrightarrow \quad \widetilde{u}(x) = c_1 e^{-x} \ \text{ und } \ \widetilde{v} = c_2 e^{2x} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix}\widetilde{u}\\ \widetilde{v}\end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}\widetilde{u}\\ \widetilde{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\widetilde{u} + \widetilde{v}\\ 3\widetilde{u} + \widetilde{v}\end{pmatrix}$$

sind

$$\begin{aligned}u(x) &= 2\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 2c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}\\ v(x) &= 3\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 3c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}\end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Lösungen des Systems (1).

Aufgabe 2

Zunächst zur Matrix A: Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Dieses lautet

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}22-\lambda & -2 & -4\\ 4 & 16-\lambda & -4\\ 2 & -1 & 16-\lambda\end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_2]} \det\begin{pmatrix}18-\lambda & -18+\lambda & 0\\ 4 & 16-\lambda & -4\\ 2 & -1 & 16-\lambda\end{pmatrix}\\ &=_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det\begin{pmatrix}0 & -18+\lambda & 0\\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4\\ 1 & -1 & 16-\lambda\end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18-\lambda)\det\begin{pmatrix}20-\lambda & -4\\ 1 & 16-\lambda\end{pmatrix}\\ &= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda)+4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324\big) = -(\lambda-18)^3.\end{aligned}$$

Wegen $\chi_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 18$ besitzt die Matrix A nur den Eigenwert 18; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum $E_A(18)$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $Ax = 18x$ bzw. $(A - 18I_3)x = 0$, also genau $\mathrm{Kern}(A - 18I_3)$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 18I_3 = \begin{pmatrix}4 & -2 & -4\\ 4 & -2 & -4\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & -4\\ 4 & -2 & -4\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \frac{1}{2}Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix}4 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{4}Z_1} \begin{pmatrix}1 & -1/2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(18) = \mathrm{Kern}(A - 18I_3) = \{s\begin{pmatrix}-1/2\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{C}\} = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}).$$

Der Eigenwert 18 hat die geometrische Vielfachheit 2, weil der Eigenraum $E_A(18)$ zweidimensional ist. Jetzt zur Matrix B: Wir berechnen das zugehörige charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 2 & -\lambda & 2\\ -1 & 0 & -\lambda\end{pmatrix} &=_{\left[\substack{Z_1 \to Z_1 + (1-\lambda)Z_3\\ Z_2 \to Z_2 + 2Z_3}\right]} \det\begin{pmatrix}0 & 1 & -\lambda(1-\lambda)\\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda\\ -1 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}\\ =_{[\text{Entw. n. } S_1]} -\det\begin{pmatrix}1 & -\lambda(1-\lambda)\\ -\lambda & 2-2\lambda\end{pmatrix} &= -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2 - 2)(1-\lambda)\,.\end{aligned}$$

Wegen $\chi_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ hat die Matrix B die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.
Wir bestimmen nun den Eigenraum $E_B(1)$ zu $\lambda_1 = 1$, also die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $(B - I_3)x = 0$:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_2 + 2Z_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -Z_1,\, Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_B(1) = \operatorname{lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenwert 1 besitzt die geometrische Vielfachheit 1, weil der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.
Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Analoges Vorgehen wie eben ergibt

$$E_B(\sqrt{2}\,) = \operatorname{lin}(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad \text{und} \qquad E_B(-\sqrt{2}\,) = \operatorname{lin}(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Die geometrische Vielfachheit von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ beträgt jeweils 1. Die Matrix B ist diagonalisierbar, weil für jeden Eigenwert von B geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Aufgabe 3

Es gilt

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_2]} (\alpha - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & \alpha - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw.} Z_1]} (\alpha - \lambda)(-\lambda) \det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 \lambda^2.$$

Fall 1: $\alpha = 0$. Dann ist $\lambda = 0$ einziger Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit 4. Für den zugehörigen Eigenraum $E_A(0)$ ergibt sich

$$E_A(0) = \operatorname{Kern}(A - 0I_4) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Also ist $\dim E_A(0) = 2 \neq 4$ und somit ist A in diesem Fall nicht diagonalisierbar.
Fall 2: $\alpha \neq 0$. Dann sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \alpha$ jeweils Eigenwerte von A mit der algebraischen Vielfachheit 2. Um $\dim E_A(0)$ zu ermitteln, könnte man wie im vorigen Fall $E_A(0)$ explizit angeben und die Dimension ablesen. Alternativ schließen wir aus

$$\dim \operatorname{Bild}(A - 0I_4) = \operatorname{rg}(A - 0I_4) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

mit der Dimensionsformel $\dim E_A(0) = \dim \operatorname{Kern}(A - 0I_4) = \dim \mathbb{C}^4 - \dim \operatorname{Bild}(A - 0I_4) = 4 - 2 = 2$. Somit stimmt für den Eigenwert 0 geometrische und algebraische Vielfachheit überein.

Ferner ist

$$\dim \operatorname{Bild}(A-\alpha I_4) = \operatorname{rg}(A-\alpha I_4) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \overset{\alpha\neq 0}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4, \end{cases}$$

woraus

$$\dim E_A(\alpha) = 4 - \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases}$$

folgt. Also ist nur für $\alpha = 4$ geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts α identisch.

Fazit: A ist genau für $\alpha = 4$ diagonalisierbar.

Aufgabe 4

Wir berechnen das charakteristische Polynom von A: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}\right]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2\to S_2+S_4]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_4]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2\to S_2-S_3]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_3]} (4-\lambda)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\big((3-\lambda)(1-\lambda)-3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3.$$

Die Matrix A besitzt also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen nun die Eigenräume:
Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das lineare Gleichungssystem $(A - 0I_4)x = 0$, also $Ax = 0$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}]{Z_1\to Z_1-3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4\to Z_4+Z_3]{Z_1\to Z_1+2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir $x_4 \in \mathbb{C}$ beliebig, so folgt aus der ersten/letzten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den eindimensionalen Eigenraum

$$E_A(0) = \{\begin{pmatrix} -x_4 \\ x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{C}\} = \operatorname{lin}(c_1)\,, \qquad \text{wobei} \quad c_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3\to Z_3-Z_1 \\ Z_4\to Z_4+Z_1}]{Z_2\to Z_2+Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1\to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_A(4) = \operatorname{lin}(c_2, c_3, c_4)\,, \qquad c_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist als reelle, symmetrische Matrix diagonalisierbar (Alternativ könnte man mit den geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte argumentieren). Da c_1 eine Basis von $E_A(0)$ und c_2, c_3, c_4 eine Basis von $E_A(4)$ ist, gilt für die Matrix S mit den Spalten c_1, c_2, c_3, c_4

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ symmetrisch ist, gibt es sogar eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Um ein solches P anzugeben, bestimmen wir jeweils eine Orthonormalbasis der Eigenräume. Eine Orthonormalbasis von $E_A(0)$ ist z.B. gegeben durch $b_1 := \frac{1}{\|c_1\|}\, c_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $E_A(4)$ verwenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren:

$$b_2 := \frac{1}{\|c_2\|}\, c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 := c_3 - \langle c_3, b_2\rangle b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_3 := \frac{1}{\|v_3\|}\, v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_4 := c_4 - \langle c_4, b_2\rangle b_2 - \langle c_4, b_3\rangle b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b_4 := \frac{1}{\|v_4\|}\, v_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Somit bildet b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $E_A(4)$.

Aufgabe 5

a) **i)** Setze zum Beispiel $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wegen

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^3 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 5$$

ist 5 der einzige Eigenwert von A.

ii) Setze zum Beispiel $B := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ mit paarweise verschiedenen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dann sind a, b, c, d die Eigenwerte der Diagonalmatrix B. Nach Voraussetzung sind diese reell und paarweise verschieden.

iii) Es ist $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2-4) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)$. Wegen $\chi_C(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \{0, -1, 1, -2, 2\}$ sind $0, -1, 1, -2, 2$ die Eigenwerte von C.

Somit hat zum Beispiel $C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die geforderte Eigenschaft.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und λ ein Eigenwert von A, d.h. es gibt $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$. Dann gilt

$$(A^2 + 5I_n)x = A^2x + 5I_nx = A(Ax) + 5x = A(\lambda x) + 5x = \lambda Ax + 5x = \lambda\lambda x + 5x = (\lambda^2+5)x\,,$$

d.h. $\lambda^2 + 5$ ist ein Eigenwert von $A^2 + 5I_n$ und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Bemerkung: Ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt $A^n x = \lambda^n x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies bestätigen wir mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

IA ($n = 1$): $Ax = \lambda x$ gilt nach Voraussetzung.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $A^n x = \lambda^n x$ (IV). Dann folgt:

$$A^{n+1}x = A(A^n x) \stackrel{\text{(IV)}}{=} A(\lambda^n x) = \lambda^n Ax = \lambda^n \lambda x = \lambda^{n+1}x.$$

Damit ergibt sich für ein beliebiges Polynom $p(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n t^n$ ($N \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$)

$$p(A)x = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n x = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n x = p(\lambda)x.$$

(Hierbei ist $A^0 := I_n$ gesetzt.) Also ist x ein Eigenvektor von $p(A)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

c) Die Aussage "Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt mindestens einen reellen Eigenwert" ist i.a. falsch. Beispielsweise hat die reelle Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wegen $\chi_B(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$ nur die nicht-reellen Eigenwerte $i, -i$.