Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I.Anapolitanos
Dr. S.Wugalter

Sommersemester 2019
30.04.2019

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie die geometrische und algebraische Vielfachheit der jeweiligen Eigenwerte an.

c) Geben Sie die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren von M an.

d) Entscheiden Sie, ob M diagonalisierbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine orthogonale Matrix P so, dass $P^T A_\alpha P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gilt? Geben Sie das jeweilige P an.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie A auf Diagonalisierbarkeit. Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix S und ihre Inverse S^{-1} so an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

b) Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$, die das lineare Gleichungssystem $Ax = 2x$ lösen.

c) Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $x \times y$, $\langle x \times y, x\rangle$, den Winkel, den die Vektoren x und y einschließen, sowie den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Untersuchen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit von auftretenden Konstanten, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{kl})_{k,l=1}^{n}, \quad \text{wobei } b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k-l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2 und 5**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.