

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt**

Aufgabe 1

a,b) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}\chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -3+\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3-\lambda & -1 \\ -3+\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (3-\lambda)(\lambda - 2)^2.\end{aligned}$$

[Schritte: erste Zeile von der zweiten abgezogen, erste Spalte zur zweiten addiert, dann nach der 2. Zeile entwickelt]

Wegen $\chi_M(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{2, 3\}$ besitzt M die Eigenwerte 2 mit zweifacher algebraischer Vielfachheit und 3 mit einfacher algebraischer Vielfachheit.

Eigenraum zu 2: Wegen

$$M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \rightarrow Z_3 - 3Z_1]{Z_2 \rightarrow Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \rightarrow Z_1 + 2Z_2]{Z_3 \rightarrow Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$E_M(2) = \text{Kern}(M - 2I_3) = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eigenraum zu 3: Eine ähnliche Rechnung ergibt

$$E_M(3) = \text{Kern}(M - 3I_3) = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da beide Eigenräume eindimensional sind, haben beide Eigenwerte die geometrische Vielfachheit 1.

c) M besitzt maximal zwei linear unabhängige Eigenvektoren, etwa: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

d) M ist nicht diagonalisierbar, weil für den Eigenwert 2 die geometrische Vielfachheit ungleich der algebraischen Vielfachheit ist.

Alternative Begründung: M ist nicht diagonalisierbar, sonst müsste M drei linear unabhängige Eigenvektoren haben. *ODER AUCH:* M ist nicht diagonalisierbar, weil es keine Basis des $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von M gibt (vgl. c)-Teil).

Aufgabe 2

Für jedes α ist die reelle Matrix A_α symmetrisch; nach dem Satz in 16.8 gibt es eine orthogonale Matrix P so, dass $P^T A_\alpha P$ Diagonalgestalt hat. Wir wissen zudem: Bei jedem derartigen P stehen in der Diagonale von $P^T A_\alpha P$ die Eigenwerte von A . Die Frage lautet also: Für welche α besitzt A_α die Eigenwerte 1, 2 und 3? Die Matrix

$$A_\alpha - I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -1+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_1} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist (unabhängig von α) singulär; somit ist 1 stets ein Eigenwert von A_α . Wegen

$$A_\alpha - 2I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -3+\alpha \end{pmatrix}$$

ist 2 stets ein Eigenwert von A_α (unabhängig von α). Schließlich haben wir noch

$$A_\alpha - 3I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -5+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_1} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist genau dann singulär, wenn die erste und dritte Zeile linear abhängig sind, wenn also $-5+\alpha = 1-\alpha$ gilt, d. h. $\alpha = 3$. Somit hat A_α nur im Fall $\alpha = 3$ den Eigenwert 3.

Bemerkung: Nachdem wir gezeigt haben, dass 1 und 2 Eigenwerte von A_α sind, können wir bei der Untersuchung, wann die Matrix A_α die Eigenwerte 1, 2, 3 besitzt, auch auf die Betrachtung von $A_\alpha - 3I_3$ verzichten und stattdessen mit Hilfe der Spur von A_α argumentieren. Da die Spur einer Matrix gleich der Summe ihrer Eigenwerte (gemäß ihrer algebraischen Vielfachheiten wiederholt, vgl. Folgerung in 16.9) ist, erhalten wir

$$3 \text{ ist Eigenwert von } A_\alpha \iff \text{Spur}(A_\alpha) = 6 \iff \frac{1}{2}((1+\alpha)+4+(1+\alpha)) = 6 \iff \alpha = 3.$$

Fazit: Genau für $\alpha = 3$ gibt es eine orthogonale Matrix P mit $P^T A_\alpha P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Setzen wir $\alpha = 3$ in die Matrizen ein, die wir oben erhalten haben, so können wir ablesen:

$$E_{A_3}(1) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad E_{A_3}(2) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad E_{A_3}(3) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Die Spalten der Matrix P sind dann normierte Eigenvektoren zu den drei Eigenwerten:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

- a) Wir berechnen zunächst die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A . Für das charakteristische Polynom von A ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{[Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_2]}{=} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{[S_3 \rightarrow S_2 + S_3]}{=} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{[\text{Entw. } Z_3]}{=} -(\lambda-1) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda-1)((2-\lambda)(3-\lambda)-2) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A , also 1, 4. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(1) = \text{Kern}(A - I_3) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{lin} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$E_A(4) = \text{Kern}(A - 4I_3) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{lin} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Aus dem gleichen Grund gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Um ein solches S zu bestimmen, muss man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A angeben.

Setze

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_A(4) \quad \text{sowie} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_A(1).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ symmetrisch ist, stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander, also gilt $v_1 \perp v_2$. Ist

$$v_3 := v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

definiert, so sind $v_3 \perp v_1$ und $v_3 \perp v_2$. Wegen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ folgt, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind und somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Aufgrund von $v_1 \in E_A(4)$, $\dim E_A(4) = 1$ und $\dim E_A(1) = 2$ ergibt sich $E_A(1) = \text{lin}(v_2, v_3)$.

Folglich ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A gegeben durch $\frac{1}{\|v_1\|} v_1$, $\frac{1}{\|v_2\|} v_2$, $\frac{1}{\|v_3\|} v_3$, also durch

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

orthogonal und es gilt

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = 2x$ hat die triviale Lösung $x = 0$. Würde $Ax = 2x$ für ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gelten, dann wäre 2 ein Eigenwert von A , was aber nach **a)** nicht der Fall ist. Folglich ist $x = 0$ die einzige Lösung von $Ax = 2x$.

- c) Ist $D := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gesetzt, so gilt gemäß **a)**: $S^{-1}AS = D$ bzw. $A = SDS^{-1}$ (*).

Hieraus folgt $A^k = SD^kS^{-1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Beweis durch Induktion:

IA: $A^1 = SD^1S^{-1}$ gilt nach (*).

IS: Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $A^k = SD^kS^{-1}$ (IV). Dann folgt:

$$A^{k+1} = AA^k \stackrel{(*), (IV)}{=} (SDS^{-1})(SD^kS^{-1}) = SD(S^{-1}S)D^kS^{-1} = SD^{k+1}S^{-1}.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ erhält man $D^k = \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und somit

$$A^k = SD^kS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4^k}{\sqrt{3}} & \frac{4^k}{\sqrt{3}} & \frac{4^k}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4^k+2}{3} & \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k-1}{3} \\ \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k+2}{3} & \frac{4^k-1}{3} \\ \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k+2}{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Für $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$x \times y = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 2-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\langle x \times y, x \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$$

[dieses Ergebnis war zu erwarten, weil stets $x \times y$ sowohl orthogonal auf x als auch orthogonal auf y steht]. Für den Winkel θ , den die Vektoren x und y einschließen, gilt

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4+0+4}} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = -\sqrt{\frac{6}{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hieraus folgt $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms lautet

$$\|x \times y\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}.$$

Aufgabe 5

Für die symmetrische Matrix A_β verwenden wir das Kriterium von Hurwitz aus 16.10. Es gilt

$$1 > 0 \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0;$$

die ersten beiden Hauptunterdeterminanten sind also positiv. Die Matrix A_β ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante > 0 ausfällt. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} \stackrel{[Z_2 \rightarrow Z_2 + 2Z_1]}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} \stackrel{[\text{Entw. n. } S_1]}{=} \det \begin{pmatrix} 4 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = 4 - \beta^2$$

ergibt sich: A_β ist positiv definit $\iff 0 < 4 - \beta^2 \iff |\beta| < 2 \iff -2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B : Für $n = 1$ ist $B = (1)$ positiv definit. Im Fall $n \geq 2$ ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Für $x := e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad x^T Bx = (1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

während sich für $y := e_1 - e_2 = (1, -1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$By = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad y^T By = (1 \ -1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

ergibt. Somit ist die Matrix B indefinit.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass B nicht positiv definit ist, kann man auch mit dem Kriterium von Hurwitz argumentieren: Da für die zweite Hauptunterdeterminante $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3 < 0$ gilt, ist B nicht positiv definit.