Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

Sommersemester 2019
08.05.2019

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x_k, y_k)$ für $(x_k, y_k) \to (0,0)$, $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ **b)** $f(x,y) = \dfrac{xy}{e^{x^2}-1}$

Aufgabe 2

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind für $(x,y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) := \frac{2x^3}{x^2+y^2} + y^2\,, \qquad g(x,y) := \frac{|xy|^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2}$$

gegeben, und es sei $f(0,0) := g(0,0) := 0$. Untersuchen Sie die Funktione f und g auf Stetigkeit.

Aufgabe 3

Die Funktionen f, g und h sind für $(x,y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}\,, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben, und es sei $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \to g(0,0)$ für $r \to 0$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} h(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} h(x,y)\Big)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Längen den folgender Kurven

a) $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \big(t,\ |t|\big)$

b) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \big(t-\sin t,\ 1-\cos t\big)$

c) $z\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto z(\varphi) := \varphi e^{i\varphi}$

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Die Kurve $\gamma\colon [-\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Berechnen Sie die Länge der Kurve γ .

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 3 und 5**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.