Formelsammlung: Höhere Mathematik 2

1. Produkt von Matrizen; Inverse Matrix.

- $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $A \to$ invertierbar: mindestens 1 Gleichung $\in \left\{ \begin{array}{l} AB = I \\ C \cdot A = I \end{array} \right.$

- Rang $A = \dim \text{Bild} A = n \Rightarrow A$ regulär.

- A^{-1}: $(A|I) \rightsquigarrow (I|A)$

- $\phi: V \to W$ lin. und $B, C \to$ Basen von V, W.

① $\underbrace{C^{[\phi]_B}}$ $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi(B) \text{ berechnen} \\ \phi(B) \text{ als Kombination der Spalten von } C \text{ schreiben.} \end{array} \right.$

$\to$ Matrix zu ϕ bzgl. der Basen B, C.

② $\boxed{D^{[\psi \circ \phi]_B} = D^{[\psi]_C} \cdot C^{[\phi]_B}}$ $\boxed{C^{[Id]_B^{-1}} = B^{[Id]_C}}$

③ $Id: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \vec{x} \mapsto \vec{x}$

$\Rightarrow D^{[\phi]_B} = D^{[Id \circ \phi]_B} = D^{[Id]_C} \cdot C^{[\phi]_B}$

2. Skalarprodukt

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\vec{x})(\vec{y}) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi \\ \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ \vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 = \|\vec{x}\|^2 \end{array} \right.$

$V = K^n$, $V \times V \to K$. Euklidisch Skalarpr.

$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{x}|\vec{y}) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \ldots + x_n \bar{y}_n \\ (\vec{x}|\vec{x}) = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \ldots + x_n \bar{x}_n \\ \quad = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 \end{array} \right.$

---

① $(\vec{x}|\vec{y}) = \overline{(\vec{y}|\vec{x})}$

② $(\alpha\vec{x} + \vec{y}|\vec{z}) = \alpha \cdot (\vec{x}|\vec{z}) + (\vec{y}|\vec{z})$

③ $\forall x \in V/\{\vec{0}\} \Rightarrow (\vec{x}|\vec{x}) \neq 0, > 0$

④ $|(\vec{x}|\vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x}|\vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}|\vec{y})}$ Cauchy-Schwarz Ungleich.

⑤ $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ Δ-Ungleichung.

⑥ $\big| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \big| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$

3. Orthonormalsystem/-Basis.

① Orthogonal $\Rightarrow (\vec{v}_i|\vec{v}_j) = 0$

② ONS $\Rightarrow \|\vec{v}_i\| = \|\vec{v}_j\| = 1$ und

③ ONB $\to v_i, v_j \to$ bilden eine Basis.

4. Gram-Schmidt-Verfahren

V - K Vektorraum (VR), $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$

① $\vec{b}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$

② $\boxed{\vec{c}_k = \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\vec{v}_k|\vec{b}_j)\,\vec{b}_j}$

③ $\boxed{\vec{b}_k = \frac{\vec{c}_k}{\|\vec{c}_k\|}}$ $\Rightarrow \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n \to$ ONS und ONB

$\text{lin}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \text{lin}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$

5. Transponierte und adjungierte Matrix

$A \in K^{m \times n} \Rightarrow A^T \in K^{n \times m}$

$A^* = \overline{(A^T)} = (\bar{A})^T \to$ konjugiert komplex.

- $(A+B)^T = A^T + B^T$ • $(AB)^T = B^T \cdot A^T$
- $(A+B)^* = A^* + B^*$ • $(AB)^* = B^* \cdot A^*$
- $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} \cdot A^*$ • $(A^T \vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A\vec{y})$
- $(A^* \vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A\vec{y})$ • $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ auch bei A^*

6. Orthogonale Matrix $\to$ in $\mathbb{R}^{n \times n}$
unitäre -||- $\to$ in $\mathbb{C}^{n \times n}$

$\Rightarrow (A\vec{x}|A\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{n \times n}/\mathbb{C}^{n \times n}$.

$\to$ Prod., Inver., Transp/Adjung. von orth./unitären $\to$ auch orthogonal/unitär.

$A \to$ orth./unitär $\Rightarrow A^T \cdot A = I / A^* A = I$

$\Rightarrow$ Spalten/Zeilen von $A \to$ ONB in $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$

7. Determinante einer Matrix

Det. Abbi. $\underbrace{K^n \times K^n \times \ldots \times K^n}_{n} \to K$ mit $K = \mathbb{R}|\mathbb{C}$.

① $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = 1$

② $\det(\vec{a}_1, \ldots, \alpha\vec{a}_j + \beta\vec{b}, \ldots, \vec{b}_n) = \alpha \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{b}_n) + \beta \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{b}_n)$

③ 2 Vekt. $\to$ vertauschen $\Rightarrow \det A \Rightarrow -1 \cdot \det A$.

④ 1 Spalte $= 0 \Rightarrow \det A = 0$

⑤ 2 gleiche Spalten $\Rightarrow \det A = 0$ — Gleiche Eigensch. auch für Zeilen

⑥ mehrfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte addieren $\Rightarrow \det A$ ändert nicht.

⑦ Spalten von $A \to$ lin. unabhängig $\Rightarrow \det A \neq 0$

⑧ $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$

⑨ $\det(A^T) = \det(A)$.

⑩ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ - invertierbar $\Leftrightarrow A^{-1}$ existiert $\Leftrightarrow A$ regulär $\Rightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow$ Spalten/Zeilen von $A \to$ lin. unabhä. $A\vec{x} = \vec{b} \to$ eindeutig lösbar.

8. Rechenregeln | Kreuzprodukt.

① $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

$\Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1$.

② $A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow x_j = \frac{\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n)}{\det A}$ j-te Spalte

③ $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$

- $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{x}, \vec{y}$
- $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\varphi$
  $\hookrightarrow$ Flächeninhalt des Parallelogramms aufgespannt von $\vec{x}$ und $\vec{y}$
- $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) \to$ bestimmt die Richtung.
- $\vec{x} \times (\alpha\vec{y} + \beta\vec{\omega}) = \vec{x} \times \alpha\vec{y} + \vec{x} \times \beta\vec{\omega}$
  $= \alpha \vec{x} \times \vec{y} + \beta \vec{x} \times \vec{\omega}$
- $(\vec{x} \times \vec{y} \mid \vec{z}) \to$ Spatprodukt.
  $(\vec{x} \times \vec{y} \mid \vec{z}) = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

9. Eigenwerte (EW) Eigenvektoren (EV)

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda \to$ EW von A und $\vec{x} \to$ EV zum EW(λ)

$E_A(\lambda) =$ Eigenraum zum EW $\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}\}$

$(A - \lambda I)\vec{x} = 0 \Rightarrow \boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$, $(A - \lambda I) \to$ nicht invert.
$\operatorname{Kern}(A - \lambda I) \neq \{\vec{0}\}$

$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)}$ $\leftarrow$ charakterist. Polynom von A. $\Rightarrow$
1. $P_A(\lambda)$ bestimmen
2. Nullstellen von $P_A(\lambda) = EW$
3. $\operatorname{Kern}(A - \lambda I)$ bestimmen

$\dim(E_A(\lambda_j)) =$ geom. Vielfach. von λ_j

$\dim E_A(\lambda_j) \leq m_j \leftarrow$ alge. Vielfachheit.

$\sum_{j=1}^{k} \dim E_A(\lambda_i) \leq n \to$ dim des Teilraums. von den EV.

EV zu $\neq$ EW $\to$ lin. unabhängig.

10. Ähnliche Matrizen

$A, D \in \mathbb{C}^{n \times n} \to$ ähnlich $\quad S \in \mathbb{C}^{n \times n}$
$\Rightarrow \boxed{D = S^{-1} \cdot A \cdot S}$ $\quad$ S-invert.

- A $\to$ diagonalisierbar
  A ähnlich zu D = Diagonalmatrix.

$\boxed{D = S^{-1} \cdot A \cdot S}$ $\quad D \to$ Diagonalmatrix.

$\Rightarrow$ Spalten von $S \to$ EV von A.
$\Rightarrow$ Diagonalelemente $\to$ EW von A.
$\Rightarrow$ Geom. Vielf. = Algebr. Vielfach.

Ähnliche Matr. $\to$ quadr. Matr.

11. Definitheit von Matrizen

$A \to$ symmetrisch / hermitesch $\mathbb{C}^{n \times n} \Rightarrow A^T = A$ / $A^* = A$.
$\Rightarrow$ Hermit. Matrix nur reelle EW
$\Rightarrow$ EV zu $\neq$ EW $\to$ orthogonal.
$\Rightarrow$ Hermit. / Symmet. Matrix diagon. $\Rightarrow S =$ unitär (orthogonal)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \to$ symmetrisch

1. $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} > 0 \mid \lambda > 0 \Rightarrow$ pos. definit. $\quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$
2. $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} < 0 \mid \lambda < 0 \Rightarrow$ neg. -11-.
3. $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} \geq 0 \mid \lambda \geq 0 \Rightarrow$ pos. semidefinit.
4. $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} \leq 0 \mid \lambda \leq 0 \Rightarrow$ neg. -11-.
5. $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} > 0$ und $\vec{y}^T \cdot A \cdot \vec{y} < 0 \Rightarrow$ indefinit $\to \lambda > 0$ und $\lambda < 0$

$y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)$
$y(t_0) = y_0 \qquad t \in I$.
$\phi : I \to \mathbb{C}$

$$y(t) = e^{A(t)} \cdot y_0 + e^{A(t)} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} \cdot b(s)\,ds$$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

12. Raumkurve ; Richtungsableitung

Raumkurve : $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenz. Fkt.
$I \subseteq \mathbb{R}$, $\gamma(I) =$ (Spur von γ / Bild von γ)

- Bogenlänge : $\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt}$ $\quad \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = \text{Jacobi Funktional Matrix.}$$

- Richtungsableitung

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}}$$ f in Richtung $\vec{v}$ in $\vec{x}_0$ differ.

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha\vec{v})}(\vec{x}_0) = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0)$$

Gradient von $f : D \to \mathbb{R}$.

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = \underset{\text{Nabla Operat.}}{\nabla} f(\vec{x}_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)}{\|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\|}$$

$\boxed{\text{wenn } \|\vec{v}\| = 1}$ $\Rightarrow -\|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) \leq \|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\|$

- Differenzierbarkeit:

$$\exists f'(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - f'(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$ ("A")

$\Rightarrow f$ db. in $\vec{x}_0$
$f : D \to \mathbb{R}^n$, D offen $\Rightarrow A =$ Ableitung von f in $\vec{x}_0$.

$\Rightarrow f$ db. in $\vec{x}_0 \Rightarrow$ Alle Richtungsabl. von f in $\vec{x}_0$ existieren. $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}}$

13: Implizit definierte Funktionen

$f: D \to \mathbb{R}$ stetig db.

Annahmen:

$\begin{cases} ① \ f(x_0, y_0) = 0 \\ ② \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y_0 = h(\vec{x}_0) \to$ die impl. def. Fkt.

$f(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Rightarrow \underline{y = h(\vec{x})}$

$$\boxed{h'(\vec{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}, h(\vec{x}))}{\frac{\partial f}{\partial h(\vec{x})}(\vec{x}, h(\vec{x}))}}$$

14. Satz von Taylor

$D \subseteq \mathbb{R}^n \to$ offen; $f \in C^{\ell+1}(D, \mathbb{R})$, $\vec{x}_0 \in D$, $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

$S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq D \to$ Strecke $\Rightarrow \exists \vec{\xi} \in S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}]$

$$\boxed{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} (\vec{h} \cdot \nabla)^k f(\vec{x}_0) + \frac{1}{(\ell+1)!} (\vec{h} \nabla)^{\ell+1} f(\vec{\xi})}$$

$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{h} \cdot \nabla)^2 = (h_1 \partial_1 + h_2 \partial_2)^2 = h_1^2 \partial_1^2 + 2 h_1 h_2 \partial_1 \partial_2 + h_2^2 \partial_2^2$

$= h_1^2 f_{xx} + 2 h_1 h_2 f_{xy} + h_2^2 f_{yy}$

$(\vec{h} \nabla)^2 = (h_1 \ h_2) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$ $\hookrightarrow$ Satz von Schwarz.

Allgemein:

$$\boxed{(\vec{h} \nabla)^2 f(\vec{x}_0) = \vec{h}^T \cdot H_f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}}$$

$H_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_1 x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_n x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$ = Hesse Matrix von f in $\vec{x}_0$.

$(\vec{h} \nabla) f(\vec{x}_0) = \vec{h} \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$

15. Lokale Extremstellen

1. f hat lok. Extremum $\Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$
2. $H_f(\vec{x}_0)$ pos. def. $\Rightarrow f$ hat ein lok. Min. in $\vec{x}_0$
   - $H_f(\vec{x}_0)$ neg. def. $\Rightarrow f$ lok. Max. in $\vec{x}_0$
   - $H_f(\vec{x}_0)$ indefinit $\Rightarrow f$ hat kein lok. Extremum im $\vec{x}_0$, Sattelpunkt in $\vec{x}_0$

3. Multiplikationsregel von Lagrange

$D \subseteq \mathbb{R}^n \to$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $\boxed{p < n}$

$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$ und $S = \{\vec{x} \in D : h(\vec{x}) = 0\}$.

$\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda_1 \cdot \nabla h_1(\vec{x}_0) + \lambda_2 \nabla h_2(\vec{x}_0) + \ldots + \lambda_p \nabla h_p(\vec{x}_0)$

16. Vektorfelder, Skalarfelder

$\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow$ Funktion: $f: D \to \mathbb{R}$ SF auf D

—〃— : $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^n$ VF —〃— —〃—

- Divergenz.

$\nabla \cdot \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \ldots \partial_n v_n$.

VF $\to$ SF.

$\partial_1 \hat{=} \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 \hat{=} \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 \hat{=} \frac{\partial}{\partial z}$

- Rotation: $\boxed{n=3}$

$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$

VF $\to$ VF

- Laplace-Operator

$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f)$ SF $\to$ SF.

$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{pmatrix}$ $\quad \Delta(f \cdot g) = (\Delta f)g + 2 \nabla f \nabla g + \Delta g \cdot f$

$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$ $\quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$

17. Kurvenintegrale über SF und VF.

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \to$ regulär in Parameterdarstellung

① Kurvenintegral über ein stetiges SF:

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig.

$$\boxed{\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \cdot dt.}$$

$\gamma \to$ geschl. $\gamma(a) = \gamma(b)$ $\Rightarrow \int_\gamma f ds = \oint f ds$

Flächeninhalt von nicht flacher Flächen.

② Kurvenintegral über ein stetiges VF.

$$\boxed{\int_\gamma \vec{v} d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \underset{\text{Skalarprodukt}}{\cdot} \gamma'(t) dt}$$

$\int_{-\gamma} \vec{v} d\vec{s} = -\int_\gamma \vec{v} d\vec{s}$

18. Potentialfeld = Konservatives Feld = Gradientfeld.

① $f \in C^1$ mit $\vec{v} = \nabla f$, f Potential von $\vec{v}$

② $\forall \vec{x}, \vec{y} \in G \Rightarrow \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unabhängig von der Kurve $\gamma: [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = \vec{x}$ und $\gamma(b) = \vec{y}$

③ Für jede geschlossene Kurve: $\oint_\gamma \vec{v} d\vec{s} = 0$

$\int_\gamma \vec{v} d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

④ Verträglichkeitsfeld:

$G \subseteq \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$

$G \subseteq \mathbb{R}^3$: $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$

$\vec{v} \to$ stetig db

⑤ $G \to$ einfach zusammenhängend.

19. Integrale über Teilmengen in $\mathbb{R}^2$

$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a,b], y \in [c,d]\}$

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\, d(x,y) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.}$$

Volumen zwischen dem Graphen von f und der xy Ebene.

$f: R \to \mathbb{R} \to$ stetig.

$f: B \to \mathbb{R}$ stetig, wobei:

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], y \in [c(x), d(x)]\}$

mit $c, d : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \boxed{\iint_B f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx}$$

20. Gaußscher Integralsatz

Gebiet = offen + wegzusammenhängend.

$\overline{G} = G \cup \partial G$ $\quad \partial G$ = Rand eines Gebiets.

$G \subseteq \mathbb{R}^2 \to$ einfach zusammenhängend.

$$\boxed{\oint_{\partial G} \vec{V}\, d\vec{s} = \iint_G \left(\frac{\partial V_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial V_1(x,y)}{\partial y} \right) d(x,y)}$$

∂G = Spur von einer einfach geschlossenen Kurve.; G links von $\gamma \Rightarrow$ pos. orient. Kurve.

$\Rightarrow \oint_\gamma \hat{=} \oint_{\partial G}$. | Bei neg. Orient. Kurve $\to$ (−) vor dem Integral.

21. Ausfluss in $\mathbb{R}^2$

$\vec{N}$ = Normaleneinheitsvektor zeigt nach draußen

$\boxed{\int_{\gamma = \partial G} \vec{V} \cdot \vec{N}\, ds}$ = Ausfluss von $\vec{V}$ durch ∂G.

$\boxed{a \le t \le b}$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ $\quad \vec{N} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{V} \vec{N}\, ds = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} dt}$$

22. Divergenzsatz in $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\oint_{\partial G} \vec{V} \cdot \vec{N} \cdot ds = \iint_G \operatorname{div} \vec{V}\, d(x,y)}$$

23. Integration über Teilmengen von $\mathbb{R}^3$

$B \subseteq \mathbb{R}^3$ der Form $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B_0,\ g(x,y) \le z \le h(x,y)\}$

wobei:

$g, h : B_0 \to \mathbb{R}$ stetig mit $g \le h$.

$B_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y \in [c(x), d(x)]\}$

$c, d : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $c \le y \le d$

$f: B \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\iiint_B f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$f = 1 \Rightarrow \operatorname{Vol}(B)$

24. Anwendung in Polarkoordinaten.

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\, d(x,y) = \iint_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot \underline{r}\, d(r,\varphi)}$$ Transformationsformel.

$\phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} \Rightarrow \det \phi'(r,\varphi) = \underline{r}$

25. Zylinderkoordinaten

= Polarkoord. in $\mathbb{R}^2$ + z-Koordinate = $\mathbb{R}^3$

$\phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \cdot r\, d(r,\varphi,z)}$$

26. Kugelkoordinaten

$\phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ = Beschreibung von $x,y,z \to$ Kugelkoord.

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint_B f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \cdot \underline{r^2 \sin\theta}\, d(r,\varphi,\theta)}$$

$D = \phi(B)$ $\quad |\det \phi'(r,\varphi,\theta)|^2 = r^2 \sin\theta$

27. Flächendarstellung, Oberflächenintegral

$\vec{N} = \frac{\pm \phi_\theta \times \phi_\varphi}{\|\phi_\theta \times \phi_\varphi\|}$ wenn $\underline{r=1}$ $\quad \phi_\theta$ und $\phi_\varphi \to$ tangential zu der Kugel.

$F = \vec{g}(B)$ = Fläche, $\vec{g}(u,v) \to$ Parametris.

① Oberflächenintegral von f über F

$$\iint_F f\,do = \iint_B f(\vec{g}(u,v)) \cdot \underline{\|\vec{g}_u(u,v) \times \vec{g}_v(u,v)\|}\, d(u,v)$$

$= do =$ skalares Oberflächenelement

$f = 1 \Rightarrow$ Flächeninhalt von F

② Stetiges VF $\vec{\omega}$

Skalarprod.

$$\iint_F \vec{\omega}\, d\vec{o} = \iint_B \vec{\omega}(\vec{g}(u,v)) \cdot \underline{\vec{g}_u(u,v) \times \vec{g}_v(u,v)}\, d(u,v)$$

Fluss von $\vec{\omega}$ durch F

vektorielles Oberflächenelement $d\vec{o} = \vec{N} \cdot do$

$\vec{g}_u \times \vec{g}_v \to$ zeigt nach außen.

28. Divergenzsatz in $\mathbb{R}^3$

$B \subseteq \mathbb{R}^3 \to$ beschränkt. abgeschloss. Bereich.

$G = B \setminus \partial B$, $\partial G = \partial B$

$\vec{N} \to$ nach außen.

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{V}\, d(x,y,z) = \iint_{\partial G} \vec{V} \vec{N}\, do = \text{Ausfluss} = A$$

29. Integralsatz von Stokes

$$\boxed{\int_{\partial F} \vec{V}\, d\vec{s} = \iint_F \operatorname{rot} \vec{V} \cdot \vec{N}\, do}$$

$F \subseteq \mathbb{R}^3 \to$ Flächenstück.

$\vec{V}: V \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow C^1$ VF.

$\vec{N}$ = Normaleneinheit. Entlang ∂F, Kopf ↑↑ $\vec{N}$ $\Rightarrow F$ links von der Person