Deg	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Polynom $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Eigenwerte (EW)

alle λ für: $\det(A - \lambda I) = p_A(\lambda) \overset{!}{=} 0$

Eigenvektoren $\vec{EV}_i$

$(A - \lambda_i \cdot I) \cdot \vec{v}_i = 0$

$\operatorname{Kern}\{A - \lambda_i \cdot I\}$

Diagonalisierbarkeit & Ähnlichkeit

B gegeben und $\vec{S} = (\vec{EV}_1, \vec{EV}_2, \vec{EV}_3)$, besitzt $\vec{EV}_{1-3}$, dann gilt: $D = S^{-1} \cdot B \cdot S \iff B = S \cdot D \cdot S^{-1}$. Man nennt B und D ähnlich. Zudem gilt: Ähnliche Matrizen haben das gleiche $p_A(\lambda)$

Für EW gilt: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ und somit gilt: $A^{1000} \cdot \vec{x} = \lambda^{1000} \cdot \vec{x}$

- stimmen $\forall$ Eigenwerte die algebraische & die geometrische Vielfachheit überein $\iff$ Matrix diagonalisierbar.
- ist die Matrix ~~[illegible]~~ symmetrisch oder hermitisch, so ist sie diagonalisierbar. (hermitisch: $\bar{A}^T$)
- ist eine Matrix normiert (Länge 1) so ist sie transponiert ihre inverteirte: $S^T = S^{-1}$ für S ist (ONB)

Geometrische / Algebraische Vielfachheit: algebraische: Wie oft ist λ_i Nullstelle von $p_A(\lambda)$

geometrische: Welche Dimension hat der Eigenraum von λ_i (wie viele Vektoren).

Es gilt: geometrische Vielfachheit eines EW $\leq$ algebraische Vielfachheit des EW.

Hurwitzkriterium

A ist positiv definit $\iff$ alle Hauptdeterminanten von A positiv:

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Definitheit: ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ~~dann~~ gilt A ist...

$$\left.\begin{array}{l} \ldots \text{ positiv definit} \iff \lambda_i > 0 \text{ (TP)} \\ \ldots \text{ negativ definit} \iff \lambda_i < 0 \text{ (HP)} \\ \ldots \text{ positiv semidefinit} \iff \lambda_i \geq 0 \text{ (SP?)} \\ \ldots \text{ negativ semidefinit} \iff \lambda_i \leq 0 \text{ (SP?)} \\ \ldots \text{ indefinit} \iff \exists \lambda_i > 0 \cap \lambda_i < 0 \text{ (SP)} \end{array}\right\} (\lambda \text{ ist Eigenwert})$$

Stetigkeit

→ Beweis: Betragsumformung

→ Gegenbeweis: Folge wie $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$

partielle Ableitung im Punkt (a,b)

mit $x \to c$: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim\limits_{x \to c} \frac{g(x,b) - g(a,b)}{x - c}$

Bsp.: $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x - 0}$ ← meist Null

$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y - 0}$

Ableitung nach Vektor: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = \left(\nabla f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Vektorfolgen: Eine Vektorfolge konvergiert, wenn jede Teilfolge des Vektors konvergiert.

Raumkurve: eine Funktion $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ stetig dbar (d.h. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ stetig dbar)

$\Rightarrow \gamma(I)$ heißt Spur von γ / Bild von γ

Differenzierbarkeit

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\| f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0) \|}{\| \vec{x} - \vec{x}_0 \|} = 0$$

$f(\vec{x}_0)$ meistens null & A meistens 0, da: $f(x) \begin{cases} \ldots & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$A = f'(x_0)$ bei $x_0 = (0,0)$ ist $A = 0$, da $0' = 0$

Bogenlänge $\mathcal{L}(\gamma)$ $[\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n]$

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt, \left[\left(\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \gamma_3' \end{pmatrix}\right)\right]$$

1. Ableitung / Jacobimatrix

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Vektoranalysis / Ableitungsarten

① **Gradient** ∇

$\operatorname{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

② **Divergenz**

$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{div}(F) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$

③ **Rotation** $\operatorname{rot} = \nabla \times \vec{F} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} VF \arrow[loop above, "rot"] \arrow[r, bend right, "div"'] & SF \arrow[l, "grad"'] \end{tikzcd}$$

Laplace Δ

$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$

$\Delta f = \nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$

Kettenregel (mit Umkehrf.)

Normal: $(g \circ f)'(\vec{x}_0) = \underbrace{g'(f(\vec{x}_0))}_{\in \mathbb{R}^{p \times m}} \cdot \underbrace{f'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$, $\underbrace{(g \circ f)'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}}$

mit Umkehr: $(f^{-1} \circ g) = (f^{-1})'(g(x,y)) \cdot g'(x,y)$

$\hookrightarrow = f'(g(x,y))^{-1} \cdot g'(x,y)$

Umkehrsatz: $(f^{-1})'(\vec{y}) = [f'(f^{-1}(\vec{y}))]^{-1}$

Satz über implizit definierte Funktionen: gegeben: ① Funktion, ② Variable nach der Aufgelöst wird ③ Auflösungspunkt (x_0, y_0, z_0)

Wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt, dann $F(x,y,z)$ nach x auflösbar:

① $F(x_0, y_0, z_0) \overset{!}{=} 0$, ② $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Zudem erhalten wir die Ableitungen der implizit definierten Funktion:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial y}(y,z) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}(x(y,z), y_0, z_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x(y,z), y_0, z_0) \\ \frac{\partial x}{\partial z}(y,z) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}(x(y,z), y_0, z_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(x(y,z), y_0, z_0) \end{cases}$$

es gilt: $x(y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y}(y,z) \\ \frac{\partial x}{\partial z}(y,z) \end{vmatrix}$

→ oft $x(y,z) \to x_0$ einsetzen.

Satz von Taylor $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^{l+1}(D, \mathbb{R})$

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \underbrace{\sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} (\vec{h} \cdot \nabla)^k \cdot f(\vec{x}_0)}_{l\text{-tes Taylorpolynom}} + \underbrace{\frac{1}{(l+1)!} (\vec{h} \cdot \nabla)^{l+1} f(c)}_{\text{Restglied}}$$

es gilt zudem: $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$ & $(\vec{h} \cdot \vec{\nabla})^k = \left[\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial x_1 \\ \partial x_2 \\ \partial x_n \end{pmatrix}\right]^k$

$= [h_1 \cdot \partial x_1 + \ldots + h_n \cdot \partial x_n]^k$ ← Binomische Formel

für $\boxed{k=2}$ Alternative: $(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) = \vec{h}^T \cdot H_f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}$ ← Hesse-matrix

Extremstellen $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$, dann $\vec{x}_0$ ist Extremstelle

(S1) $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$, (S2) Hesse-Matrix für jeden in (S1) gefunden Punkt.

→ Eigenwerte der Hessematrix berechnen. Ist (sind) alle λ...

... $\lambda > 0 \Rightarrow$ positiv definit $\Rightarrow$ Tiefpunkt

... $\lambda < 0 \Rightarrow$ negativ definit $\Rightarrow$ Hochpunkt

... $\lambda_a > 0, \lambda_b < 0 \Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Lagrange Multiplikatoren $f: M \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z)$... es gilt nach Lagrangeregel: f hat eine Extremstelle in $(x_0, y_0, z_0) \in M$ wenn:

$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \cdot \nabla(M(x_0, y_0, z_0))$ ← mit M vorher null gesetzt.

Zum Schluss alle Punkte die gefunden in $f(x,y,z)$ einsetzen und anhand von Wert Hoch-/Tiefpunkt ablesen.

Kurvenintegrale

① **Skalarfeld** $\gamma: [a,b] \to D$, $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$

$$\int_\gamma f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt, \quad \int_{-\gamma} f \, ds = \int_\gamma f \, ds$$

② **Vektorfeld** $\gamma: [a,b] \to D$, $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$ $\Rightarrow$ ist $\vec{v}$ Potentialfeld, so gilt:

$$\int_\gamma \vec{v} \, ds = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt, \quad \int_{-\gamma} f \, ds = -\int_\gamma f \, ds \qquad \oint_\gamma \vec{v} \, ds = 0$$

Hinweis: $\oint$ bedeutet geschlossene Kurve: $(\gamma(a) = \gamma(b))$

Kurvenintegral & Potentialfeld

$\int_\gamma \nabla f \, ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ (∇f: Potentialfeld | f: Potential)

Potentialfeld (auch: Gradientenfeld / konservatives Feld) Satz: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet …

→ falls G einfach zusammenhängend: $\vec{v}$ ist Potentialfeld falls $\forall j,k = 1,\dots,n$ gilt $\partial_j v_k = \partial_k v_j$

(also $\partial_j v_k = \partial_k v_j$) ⇒ in $\mathbb{R}^2$: $\partial_x v_2 = \partial_y v_1$ und in $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$.

• Ist $\vec{v}$ Potentialfeld, so ist $\vec{v}$ = Gradient vom Potential P: $\nabla P = \vec{v}$.

Fluss

wenn die Kurve $\gamma(t)$ Rand ∂G eines Gebiets ist und $\vec{N}$ nach außen gerichtet ist, dann:

$\oint_{\partial G} \vec{v}\cdot\vec{N}\, ds$ (Aus-) Fluss vom Vektorfeld $\vec{v}$ durch ∂G

Zudem gilt, $\gamma(t)$ ist die positiv orientierte Kurve von ∂G mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$

$\vec{N}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t)\end{pmatrix}$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$ $t \in [a,b]$

Es gilt: $\oint_{\partial G} \vec{v}\cdot\vec{N}\, ds = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t)\end{pmatrix} \cdot \|\gamma'(t)\|$

$$\oint_{\partial G} \vec{v}\cdot\vec{N}\, ds = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t)\end{pmatrix} dt$$

$\Rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix}$

Satz von Green / Gaußscher Integralsatz

• G ist einfach zusammenhängendes Gebiet

• ∂G von einfach geschlossener Kurve eingeschlossen

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in C^1$, so gilt:

$$\oint_{\partial G} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint_G \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) d(x,y)$$

⇒ wenn $\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} \Leftrightarrow \oint_{\partial G} \vec{v}\, d\vec{s} = 0$ & $\vec{v}$ ist Potentialfeld.

<u>WICHTIG</u>: Der Satz gilt auch wenn γ stückweise integrierbar ist.

Divergenzsatz in $\mathbb{R}^2$

→ Fluss von Vektorfeld $\vec{v}$ durch Rand ∂G eines Gebiets:

$$\oint_{\partial G} \vec{v}\cdot\vec{N}\, ds = \iint_G \mathrm{div}\,\vec{v}\; d(x,y)$$

⇒ wenn $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$

Divergenzsatz in $\mathbb{R}^3$

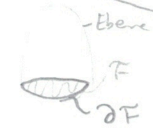
Fluss durch Fläche / Rand in $\mathbb{R}^3$ von Vektorfeld $\vec{v}$.

$$\iint_{\partial G} \vec{v}\cdot\vec{N}\, do = \iiint_G \mathrm{div}\,\vec{v}\; d(x,y,z).$$

Hierbei ist ∂G als Fläche schwer darstellbar, G als Volumen ist leicht darstellbar

Satz von Stokes

$$\oint_{\partial F} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint_F \mathrm{rot}\,\vec{v} \cdot (\vec{g}_x \times \vec{g}_y)\, d(x,y)$$



gegeben:

• Vektorfeld $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

• Menge $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : [F(x,y,z)], [f(x,y) \lesseqqgtr z]\}$ (F beschreibt …) ⇒ beschreibt z-Koordinate für $g(x,y,z)$

Nun gilt (ist definiert): $\vec{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y)\end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{g}_x \times \vec{g}_y) = \begin{pmatrix} -\partial_x f(x,y) \\ -\partial_y f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$

⇒ ① $F(x,y,z)$: $\underbrace{x^2+y^2}_{h(x)} \le 4$ ⇒ IB = $r \in [0,2]$, $\varphi \in [0,2\pi]$

Für die Integrationsgrenzen gilt: ① wenn $F(x,y,z) =: h(x,y) \le d$ mit $d \in \mathbb{R}$ ist $F(x,y,z)$ direkt Integrationsbereich (IB)

② wenn $F(x,y,z) =: h(x,y,z) \le z \Leftrightarrow$ setze gleich: $h(x,y) = f(x,y)$. Die Ergebene Funktion ergibt Integrationsbereich

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi)\end{pmatrix} = \phi$, $\det \phi' = r$

Empfehlung: $\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}$

$$\iint_A f(x,y)\, d(x,y) = \iint_B f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot r\; d(r,\varphi)$$

$\to r = \sqrt{x^2+y^2}$

Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \phi$ $\det\phi' = r$ (z → kann auch $z(x,y)$)

$$\iiint_A f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint_B f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \cdot r\; d(r,\varphi,z)$$

Empfehlung: $\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{z_0}^{z_1}$

Kugelkoordinaten

$\det\phi' = r^2 \cdot \sin(\Theta)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\phi(r,\Theta,\varphi) = \begin{vmatrix} r\sin(\Theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\Theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\Theta)\end{vmatrix}$

Es gilt: $\iiint_A f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \dots$

$\dots = \iiint_B f(r\sin(\Theta)\cos(\varphi), r\sin(\Theta)\sin(\varphi), r\cos(\Theta))\, r^2 \sin(\Theta)\, d(r,\varphi,\Theta)$

Empfehlung: $\int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\Theta_0}^{\Theta_1}$

$\Theta_{max}\ [0,\pi]$, $\varphi_{max}\ [0,2\pi]$

Oberflächenintegral / Fluss durch Fläche ($\mathbb{R}^3$)

$\vec{g}(x,y) \mathrel{\hat=}$ Fläche / Oberfläche: $F := \{g(x,y), (x,y) \in A\}$

wenn $f = 1$ (Volumen) …

Skalarfeld: $\iint_F f\, do = \iint_A f(\vec{g}(x,y)) \cdot \|\partial_x \vec{g}(x,y) \times \partial_y \vec{g}(x,y)\|$ ⇒ oft $g(x,y)$ bestimmen!

Vektorfeld: $\iint_F \vec{\omega}\, d\vec{o} = \iint_A \vec{\omega}(\vec{g}(x,y)) \cdot (\partial_x \vec{g}(x,y) \times \partial_y \vec{g}(x,y))$

Injektivität: wenn zu jedem y der Zielmenge höchstens ein oder evtl. gar kein x der Definitionsmenge gehört

Surjektivität: jedes Element der Zielmenge wird mind. 1× als Funktionswert angenommen.

Bijektivität: → streng monoton wachsend

Umformung $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

Komplexe Zahlen

$z = a+bi$ (Normalform)

Argument: $\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$, $\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$, $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$

• $z^n = a+b$; → $z^n = r \cdot e^{i\varphi}$ ↳ $z_k = r^{1/n} e^{i\left(\frac{2\pi k + \varphi}{n}\right)}$ für $k = (0,1,\dots,n-1)$

$\varphi = \pi - \lvert\varphi\rvert$	$\varphi = \varphi$
$\varphi = \pi + \lvert\varphi\rvert$	$\varphi = 2\pi - \lvert\varphi\rvert$

Polarform: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin(\varphi))$

$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$

Eulerform: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$

$z^n = |z|^n \cdot e^{in\varphi}$

Dreiecksungleichung

$|a+b| \le |a| + |b|$

$||a| - |b|| \le |a-b|$

$a \ge b \Leftrightarrow a^n \ge b^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} \ge \sqrt[n]{b}$

Kern / Bild

Kern: ZNF bilden → „-1 Trick" → kern = $\mathrm{lin}\{v_1, v_2, \dots\}$ → Dimensionsformel

wenn Matrix invertierbar ⇔ Kern $\{\vec{0}\}$

Bild: Vektoren aus Matrix wählen → lin. unabhängig. So viele wie Rang

Additionstheoreme:

① $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$

② $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

③ $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

④ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

⑤ $\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$

⑥ $\sin(\varphi)\cos(\Theta) = \frac{\sin(\varphi+\Theta) + \sin(\varphi - \Theta)}{2}$

⑦ $\sin(\varphi)\sin(\Theta) = \frac{\cos(\varphi - \Theta) - \cos(\varphi + \Theta)}{2}$

⑧ $\cos(\varphi)\cos(\Theta) = \frac{\cos(\varphi+\Theta) + \cos(\varphi-\Theta)}{2}$

⑨ $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$

⑩ $\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 1 - 2\sin^2(\varphi)$

Wichtige Funktionen

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i \cdot \sin(ix)$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$

$\mathrm{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$

Satz von Taylor

(1) Funktionswert und alle benötigten Ableitungen um den Entwicklungspunkt ...

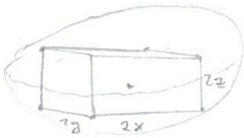
$\Rightarrow f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$. Für das zweite Taylorpolynom gilt:

→ es gilt: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$T_{2,f}(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + (x - x_0)\cdot f_x(\vec{x}_0) + (y - y_0)\cdot f_y(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f_{xx}(\vec{x}_0) + (x-x_0)(y-y_0) f_{xy}(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}(y-y_0)^2 f_{yy}(\vec{x}_0)$$

Beispiel Lagrange Multiplikatoren

(1.) Menge der maximalen Oberfläche die ein in dem Körper E{...} vollständig enthaltener achsenparalleler Quader maximal haben kann:



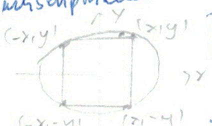
$$f(x,y,z) = 2(2x\cdot 2z + 2y\cdot 2z + 2y\cdot 2x)$$

$$f(x,y,z) = (8xy + 8yz + 8xz)$$

(2.) Maximales Volumen, welches ein in E{...} vollständig enthaltener, achsenparalleler Quader maximal haben kann.

$$f(x,y,z) = 2x\cdot 2y\cdot 2z = 8xyz$$

(3.) Größter Flächeninhalt eines Rechtecks das in der Menge B{...} liegt und achsenparallel ist



$\Big\}\ f(x,y) = 4xy$

WICHTIG, nach Ermittlung der Punkte, die Punkte in $f(x,y,z)$ einsetzen und Maximum entnehmen

Fluss des Vektorfeldes

$\vec{E}(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 - y \\ 2y \end{pmatrix}$ durch das Gebiet

$\{x^2+y^2 \le 1,\ y \ge \frac{1}{\sqrt{2}+1}(x+1)\}$

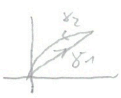
Divergenzsatz

$\Rightarrow$ $\operatorname{div} \vec{E} = (2x + 2)$

$$\int_{-1}^{1/\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}+1}(x+1)}^{\sqrt{1-x^2}} (2x+2)\, dy\, dx \ldots$$

Oder mit Raumkurve berechnen:

Gebiet:



$\Rightarrow \gamma_1, \gamma_2$ parametrisieren und

$$\text{Fluss} = \int_a^b \vec{E}(\gamma(t)) \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} dt$$

$\left(\gamma(t) = \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right)$

Beispiel Satz über Implizit..

Beweisen, dass $xz + e^{yx} = 2$ in einer Umgebung des Punktes $(1,0,1)$ nach x auflösbar. Zudem berechne $\frac{\partial x}{\partial z}$ und $\frac{\partial x}{\partial y}$

(1.) $F(x,y,z) = xz + e^{yx} - 2$

$\hookrightarrow F(1,0,1) = 0$ ✓

(2.) $\frac{\partial F}{\partial x} = z + y e^{xy}$ und

$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1) = 1 + 0\cdot e^0 = 1 \neq 0$ ✓

Somit ist $F(x,y,z) = 0$ lokal in einer Umgebung $(1,0,1)$ nach x auflösbar

$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Funktion, sodass jede Lösung um $(1,0,1)$ genau die Form $(x(y,z), y, z)$ hat.

$\nabla F(x(y,z), y, z) = \begin{pmatrix} \partial x/\partial y\,(y,z) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{\partial x}{\partial y}(0,1) = \left[-\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1)\right]^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(1,0,1)$

$= -1 \cdot 1 = -1$

Analog $\frac{\partial x}{\partial z}(0,1) = \ldots$

$= \frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = -1 \cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$

$\Rightarrow x'(y,z) = (-1, -1)$

Durchschnittstemperatur Erde

$\stackrel{!}{=} \frac{30\cdot \mathrm{vol} + 0\cdot 2\cdot \mathrm{vol}\, B}{\mathrm{vol}(A + B)}$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} r^2 \sin\theta \, d\theta\, dr\, d\varphi \ldots$$

Rotation / Stokes / Fluss

$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - 2x^2,\ x^2+y^2 \le 5\}$

$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z + x \\ 2x + 3z \\ y - 5z \end{pmatrix}$. $\Rightarrow g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y^2 - 2x^2 \end{pmatrix}$

$\vec{g}_x \times \vec{g}_y = \begin{pmatrix} -4x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4r\cos(x) \\ -2r\sin(x) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r \, d\varphi\, dr$$

Stetigkeit

$g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ in $(0,0)$. Annahme:

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = (x,y) \rightarrow g\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$ // Gegenbeweis!

Differenzierbarkeit.

Oftmals der Trick:

wenn $f(x,y) = (x^2+y^2)\cdot g(x) = \|(x,y)\| \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot g(x,y)$

$$\rightarrow \frac{|f(x,y) - f(0,0) - A\cdot \binom{x}{y}|}{\|(x,y)\|} = \frac{\|(x,y)\|\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot g(x,y) - f(0,0) - A\cdot\binom{x}{y}}{\|(x,y)\|}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\cdot g(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{\text{oft} = 0} - A\binom{x}{y} \stackrel{!}{=} 0$$

↪ oft null, damit erfüllt.

Zudem gilt: $\frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$, $\frac{x^4}{x^4+y^4} \le 1, \ldots$

und $\sin(f(x,y)) \le 1$, $\cos(f(x,y)) \le 1, \ldots$

Volumen des Paraboloids (Weinglas) Weinglas

$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 3,\ z \ge x^2+y^2\}$

$\Rightarrow$ Zylinderkoordinaten:

$z \in [x^2+y^2, \sqrt{3-(x^2+y^2)}]$

$r \in [0, R_0] \rightarrow R_0^2 = \sqrt{3 - R_0^2} \rightsquigarrow R_0 = 1{,}175$

$\Rightarrow z \in [x^2+y^2, \sqrt{3-(x^2+y^2)}]$, $r \in [0, 1{,}175]$

$$\Rightarrow \varphi \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{1{,}175}\int_{R^2}^{\sqrt{3-R^2}} 1 \cdot R \, dz\, dR\, d\varphi$$

Hohlkegel

$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2+y^2+z^2 \le 2,\ \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

Fluss durch Hohlkegel von Vektorfeld $\vec{v}$.

$\vec{v}(x,y,z) := (x + (1+z)y, -y, z + e^{e^x})$.

$\rightarrow$ Kugelkoordinaten: $r \in [0, \sqrt{2}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}), \tan^{-1}(\sqrt{3})]$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/3} (\operatorname{div}\vec{v}) \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi\, dr.$$

Stokes

$S = \{x^2+y^2+z^2 = 16,\ z > 0\}$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}$: Tipp: erst Rotation, dann Kugelkoordinaten.

$\Rightarrow \vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} 4xy \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 4\cdot r\cos(\varphi)\cdot r\sin(\varphi) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot r^2 \sin(\theta)\, d\theta\, dr\, d\varphi$$

$\cos(x) \rightarrow \sin(x) \rightarrow -\cos(x) \rightarrow -\sin(x) \rightarrow \cos(x)$

$(\sqrt{ax})' = \frac{a}{2\sqrt{ax}}$

$\int \sqrt{ax} = \frac{2\sqrt{ax}^{3/2}}{3}$

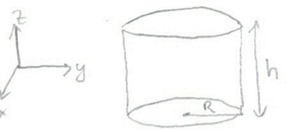
$\arctan(ax)' = \frac{a}{a^2x^2+1}$

$\arcsin(ax)]'$

Analytische Körper

1.) Zylinder:

$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = R^2, 0 \le z \le h\}$



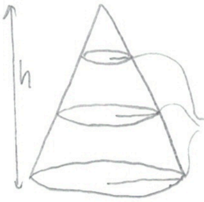
2.) Kegel

$M := \{x^2+y^2 = R^2 \cdot z^2\}$ leer oft:

$M := \{z = \sqrt{\frac{1}{R^2}(x^2+y^2)}\}$

mit $\frac{1}{R^2} = a \in \mathbb{R} > 0$.

wenn $\{x^2+y^2 \le R^2 \cdot z^2\}$ → voll.



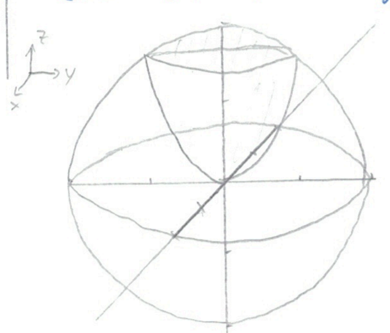
$R = \sqrt{\frac{1}{z^2}(x^2+y^2)}$

$z \in (0, h)$

5.) Weinglas:

Paraboloid & Kugel

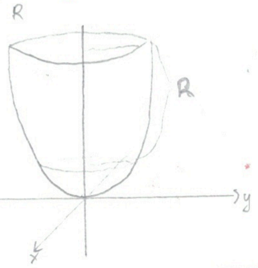
$M := \{z \ge x^2+y^2, x^2+y^2+z^2 \le R_{Kug}^2\}$



⟺

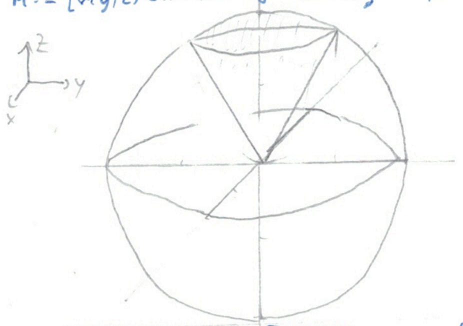
3.) Paraboloid:

$M := \{\overbrace{z = \underbrace{x^2+y^2}_{R}}^{leer}\} / := \{\overbrace{z \ge x^2+y^2}^{voll}\}$



4.) Eistüte: Kegel & Kugel

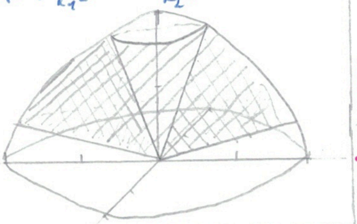
$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \ge R_{Keg}^2 \cdot z^2, x^2+y^2+z^2 \le R_{Kug}^2\}$

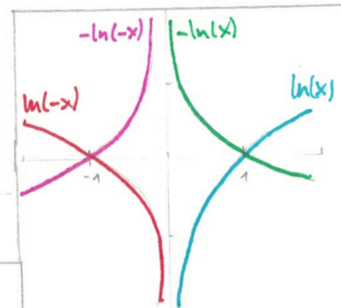


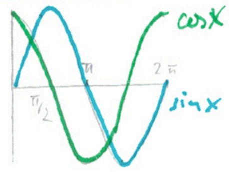
⟺

6.) Hohlkegel: $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R_{Kug.}, \sqrt{\frac{1}{R_1^2}(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{\frac{1}{R_2^2}(x^2+y^2)}\}$

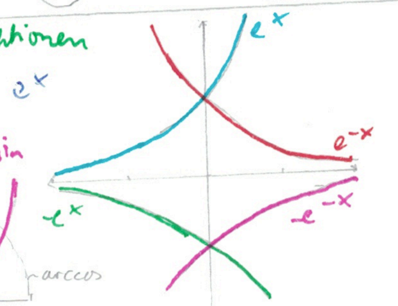
mit $\sqrt{\frac{1}{R_1^2}} < \sqrt{\frac{1}{R_2^2}}$

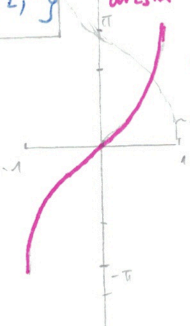


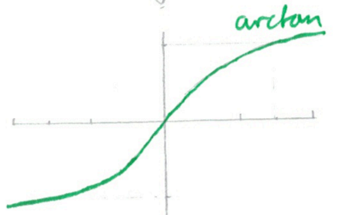




Funktionen







Ableitungen

$[\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x)+1$

$[\arctan(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$

$[\text{arccot}(x)]' = -\frac{1}{1+x^2}$

$[\cot(x)]' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

$[\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\text{arcsinh}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$[\text{arccosh}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$[\text{arctanh}(x)]' = \frac{1}{1-x^2}$

$[\text{arccoth}(x)]' = \frac{1}{1-x^2}$

$[\sinh(x)]' = \cosh(x)$

$[\cosh x]' = \sinh(x)$

$[\tanh(x)]' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

$[\sin^2(x)]' = 2\sin x \cos x$

$[\cos^2 x]' = -2\sin x \cos(x)$

$\sin^2(ax) = 2a \frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}$

$\ln'(ax) = \frac{1}{x}$

Integrale

$\int \sin^2(ax) = -\frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{x}{2}$

$\int \cos^2(ax) = \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{x}{2}$

$\int \sin^2(ax)\cos(bx) =$

$= -\frac{\sin((b+2a)x)}{4(b+2a)} - \frac{\cos((b-2a)x)}{4(b-2a)} - \frac{\cos(bx)}{2b}$

$\int \cos^2(ax) \cdot \sin(bx) = \ldots$

$\ldots -\frac{\cos((b+2a)x)}{4(b+2a)} - \frac{\cos((b-2a)x)}{4(b-2a)} - \frac{\cos(bx)}{2b}$

$\int \sin^3(ax) = \frac{\cos(ax)(\cos^2(ax)-3)}{3a}$

$\int \cos^3(ax) = -\frac{\sin(ax)(\sin^2(ax)-3)}{3a}$

$\int \arctan(ax) = x \cdot \arctan(ax) - \frac{\ln(a^2x^2+1)}{2a}$

$\int \arcsin(ax) = x \arcsin(ax) + \frac{\sqrt{1-a^2 \cdot x^2}}{a}$

$\int \arccos(ax) = x \arccos(ax) - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$

$\int \sqrt{ax} = \frac{2\sqrt{a}\, x^{3/2}}{3}$

$\int x \cdot \arctan(ax) = \frac{(a^2x^2+1)\arctan(ax) - ax}{2a^2}$

$\int \sinh(ax) = \frac{\cosh(ax)}{a}$

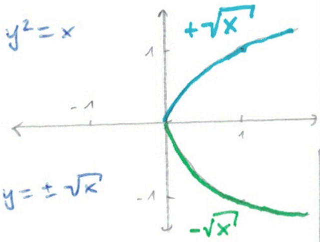
$\int \cosh(ax) = \frac{\sinh(ax)}{a}$

$\int \ln(ax) = x(\ln(ax)-1)$

$\int \ln^2(ax) = x(\ln^2(ax) - 2\ln(ax) + 2)$

$y^2 = x$

$y = \pm\sqrt{x}$



Determinante

$\begin{vmatrix} a_1^+ & a_2^- & a_3^+ & a_4^- \\ b_1^- & b_2^+ & b_3^- & b_4^+ \\ c_1^+ & c_2^- & c_3^+ & c_4^- \\ d_1^- & d_2^+ & d_3^- & d_4^+ \end{vmatrix}$

Sternförmig konvex:

Ein Gebiet heißt sternförmig / konvex, falls es ein $\vec{x}_0 \in G$ gibt, sodass $\vec{x}, \vec{y} \in G$ gilt:

$t \cdot \vec{x}_0 + (1-t) \cdot \vec{y} \in G \quad (t \in [0,1])$

Dimensionsformel $A \in K^{n \times m}$

$n \to$ Zeilen, $m \to$ Spalten: $\dim(\text{Bild}(A)) + \dim(\text{Kern}(A)) = m$

Determinante

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$\det(A^k) = [\det(A)]^k$

$\det A^T = \det A$

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det}$

$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

n Zeilen

wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

dann:

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Matrizen

$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(K \cdot A)^{-1} = K^{-1} \cdot A^{-1}$

A^* → adjungierte (komplex konjugiert)

Folgen $n \to \infty$

$\sqrt[n]{a} \to 1$

$\sqrt[n]{n} \to 1$

$\sqrt[n]{n!} \to \infty$

$\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$

$(1+\frac{1}{n})^n \to e$

$(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$

$(1-\frac{x}{n})^n \to e^{-x}$

$\frac{n^n}{n!} \to \infty$

Sin / Cos

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$|\sin(n)| \le |n| \cdot e^{|n|}$

$|\cos(n) - 1| \le |n| \cdot e^{|n|}$

$|\sin(n) - n| \le |n|^2 \cdot e^{|n|}$

$|\cos(n) - n| \le |n|^2 \cdot e^{|n|}$