Autor: Thomas Merkel
Email: thomas.merkel@stud.uni-karlsruhe.de

HM II Merkblätter

(mit Beispielen)

Das wichtigste aus HMII kurz, gut und verständlich zusammengefasst

Multiplikation von Matrizen

Es muss gelten: für $A \cdot B$

→ Spaltenanzahl A = Zeilenanzahl B

Schema

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & AB \end{array}$$

c_{ik} = Skalarprodukt von i-te Zeile von A und k-te Spalte von B

Bsp.:

$$\begin{array}{c|c} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}}^{B} \\ \hline \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 1 & 19 & 2 \\ 19 & 4 & 49 & 8 \end{pmatrix}}_{A \cdot B = C} \end{array}$$

Determinaten

→ Berechnung der Determinanten

- Entwicklung nach Zeilen oder Spalten
- Vorzeichenverteilung:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ - & + & - & \\ \vdots & & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Determinante einer 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det A = ad - bc$

Bsp.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach 3. Spalte

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Vorzeichenverteilung

alle nicht rot eingerahmten

alle nicht blau eingerahmten

alle nicht grün eingerahmten

Vorzeichenverteilung

$$= 3 \cdot (1 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1)) + (-1) \cdot (1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1)$$

$$= 3 \cdot (2 - 2) - 1 \cdot (-2 - 2)$$

$$= \underline{\underline{4}}$$

→ **Determinantenregeln**

$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$

$\det A^T = \det A$

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$\det \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existiert $\Leftrightarrow$ A regulär $\Leftrightarrow$ A invertierbar

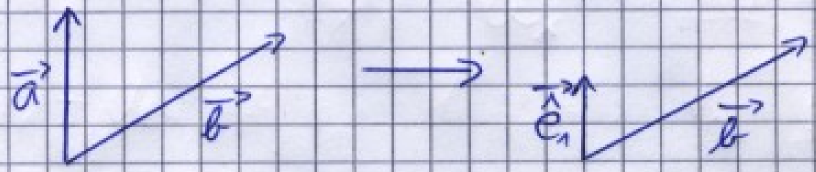
$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar

$\Leftrightarrow$ Zeilen (Spalten) linear unabhängig

Gram-Schmidtsches Orthonormierungsverfahren

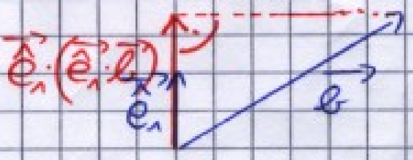
<u>gegeben</u>: Basis aus 2 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$

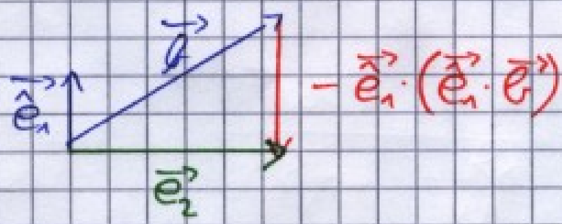
①



$$\vec{\hat{e}}_1 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{\vec{a}^2}}$$

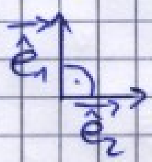
②





$$\vec{e}_2 = \vec{b} - \vec{\hat{e}}_1 \cdot (\vec{\hat{e}}_1 \cdot \vec{b})$$

③



$$\vec{\hat{e}}_2 = \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}$$

Orthogonale Projektionen

① ONB für Unterraum berechnen $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \dots, \vec{w_m}\}$
(m = Dimension des Unterraums)
$\vec{w_i} \in \mathbb{R}^n$ = Urbildraum
→ Gram-Schmidtsches Orthonormierungsverfahren

② Projektionsmatrix bestimmen

$$P(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{w_i}, \vec{x} \rangle \vec{w_i} = \sum_{i=1}^{m} (\vec{w_i}^T \vec{x}) \cdot \vec{w_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\vec{w_i} \cdot \vec{w_i}^T) \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{x}$$

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{m} (\vec{w_i} \cdot \vec{w_i}^T)}$$

Bsp.: Bestimme die orthogonale Projektion auf

$$E = \left\{ \vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

① $$\vec{\hat{e}_1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\hat{e}_2} = \frac{\vec{e_2}}{\|\vec{e_2}\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow w_1 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

②

$$A = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot(2\ 1\ 2\ 0) + \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}\cdot(1\ -2\ 0\ 2)$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}4&2&4&0\\2&1&2&0\\4&2&4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&0&2\\-2&4&0&-4\\0&0&0&0\\2&-4&0&4\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}5&0&4&2\\0&5&2&-4\\4&2&4&0\\2&-4&0&4\end{pmatrix}$$

Orthogonale Transformationen

Eine $n \times n$ Matrix A heißt orthogonal, falls

$\rightarrow A^T A = A A^T = E$

$\rightarrow$ Spaltenvektoren ein Orthonormalsystem bilden

$\rightarrow$ Zeilenvektoren ein Orthonormalsystem bilden

Falls

$\det A = 1$: Drehung

$\det A = -1$: Spiegelung

Eigenwerte und Eigenvektoren

Problemlösung $\quad Av = \lambda v$

v = Eigenvektor

λ = Eigenwert

① Charakteristisches Polynom aufstellen

$\det(A - \lambda E) = 0$

② λ_i (Eigenwerte) berechnen

→ algebraische Vielfachheit = Vielfachheit des Eigenwertes als Nullstelle des char. Polynoms

③ v_i (Eigenvektoren) berechnen

$(A - \lambda_i E) \cdot v_i = \vec{0}$

→ geometrische Vielfachheit = Dimension des zum Eigenwert gehörigen Eigenraums

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

① $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -3 & -2-\lambda & 0 \\ -3 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot (-2-\lambda) + (1-\lambda) \cdot 6$

$= (3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2) \cdot (-2-\lambda) + 6 - 6\lambda$

$= \cancel{-6} - 3\lambda + 6\lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{+6} - 6\lambda$

$= 2\lambda^2 - \lambda - \lambda^3 = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$

$= -\lambda(1-\lambda)^2$

② $\lambda_1 = 0 \quad a(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 = 1 \quad a(\lambda_2) = 2$

③ $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow E_1 = \left\{ \vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \mu \in \mathbb{R}$$

$g(E_1) = 1$

$\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 2 & 0 \\ -3 & -2-1 & 0 \\ -3 & -3 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow E_2 = \left\{ \vec{x} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$

$g(E_2) = 2$

Diagonalisierung von Matrizen

! → Matrix A diagonalisierbar, falls für alle Eigenwerte gilt: $g(\lambda_i) = a(\lambda_i)$ (geometrische V. = algebraische V.)

$$B = S^{-1} A S$$

B = Diagonalmatrix

S = Basis aus Eigenvektoren

mit

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

① Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren
→ (siehe anderes Blatt) Überprüfung $g(\lambda_i) = a(\lambda_i)$

② Aufstellen von S und B

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren

Eigenwerte

⟹ Bei symmetrischen Matrizen bilden die **Eigenvektoren** ein **Orthogonalsystem**

Quadriken (Hauptachsentransformation, Klassifizierung)

① A, b, c bestimmen

$$\boxed{x^T A x + b^T x + c = 0 \quad \text{(Quadrik)}}$$

② Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen

③ S = Basis aus normierten orthogonalen Eigenvektoren bestimmen

(gegebenfalls Gram-Schmidt-Orthonormierung)

Hauptachsentransformation

④ $\tilde{A} = B = S^T A S \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\tilde{b} = S^T b \qquad S = (\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$

⑤ neue Quadrik nach Transformation aufschreiben

Parallelverschiebung

⑥ quadratisches Ergänzen

⑦ Parallelverschiebung

⑧ Klassifizierung

Bsp.:

$$0x_1^2 + 0x_2^2 + 0x_3^2 - 2x_1x_2 + \sqrt{2}\,x_2 + 2x_3 + \frac{1}{8} = 0$$

① $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c = \frac{1}{8}$

② $\lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = 2 \;,\; \lambda_3 = 0$

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

③ $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

④ $\tilde{A} = B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\tilde{b} = S^T b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

⑤ $y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_1 - y_2 + y_3 + \frac{1}{8} = 0$

⑥ $(y_1^2 + 2y_1) + (2y^2 - y_2) + y_3 + \frac{1}{8} = 0$

$(y_1^2 + 2y_1 + 1 - 1) + 2\left(y_2^2 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + y_3 + \frac{1}{8} = 0$

$(y_1 + 1)^2 - 1 + 2\left(y_2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{2}{16} + y_3 + \frac{1}{8} = 0$

$(y_1 + 1)^2 + 2\left(y_2 - \frac{1}{4}\right)^2 + y_3 - 1 = 0$

⑦ Parallelverschiebung um $p = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{4}\\ 1\end{pmatrix}$ $z = y - p$

$z_1^2 + 2z_2^2 + z_3 = 0$

⑧ Formelsammlung: $\longrightarrow$ elliptisches Paraboloid

Lineare Differentialgleichungssysteme

$$y'(t) = A\,y(t)$$

① Einführung neuer Koordinaten

$$y(t) = S\,\tilde{y}(t)$$

$$\rightarrow \quad S\tilde{y}'(t) = AS\tilde{y}(t)$$

$$\tilde{y}'(t) = S^{-1}AS\,\tilde{y}(t)$$

$$\tilde{y}'(t) = B\,\tilde{y}(t)$$

S = Basis aus Eigenvektoren von A

B = Diagonalmatrix

B möglichst einfach : Diagonalgestalt
→ Diagonalisierung von A (siehe anderes Blatt)

② Lösen des Differentialgleichungssystems $\tilde{y}'(t) = B\tilde{y}(t)$

③ Rücktransformierung $y(t) = S\tilde{y}(t)$

Bsp.:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} y(t)$$

① Diagonalisierung von A mit

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② $\tilde{y}'(t) = B\tilde{y}(t)$

$$\tilde{y}_1'(t) = 0 \qquad \tilde{y}_1(t) = c_1$$

$$\tilde{y}_2'(t) = \tilde{y}_2(t) \qquad \tilde{y}_2(t) = c_2 e^t$$

$$\tilde{y}_3'(t) = \tilde{y}_3(t) \qquad \tilde{y}_3(t) = c_3 e^t$$

③ $y(t) = S\tilde{y}(t)$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix}$$

$$y_1(t) = -2c_1 - c_2 e^t$$
$$y_2(t) = 3c_1 + c_2 e^t$$
$$y_3(t) = 3c_1 + c_3 e^t$$

Jakobi-Matrix, Gradient, Hesse-Matrix, Nabla-Operator

→ **Gradient**: Ableitung einer reelwertigen Funktion

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\right) \quad \text{(Zeilenvektor)}$$

$$\nabla f(\vec{x}) = (\operatorname{grad} f(\vec{x}))^T \quad \text{(Spaltenvektor)}$$

Differentialoperator bzw. Nablaoperator $\qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

→ **Jakobi-Matrix**: Ableitung einer vektorwertigen Funktion

$\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^m$

$$J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\vec{x}) \\ \operatorname{grad} f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

→ **Hesse-Matrix**: Matrix der zweiten Ableitungen einer reelwertigen Funktion

$$Hf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1 x_1} f(\vec{x}) & \cdots & \partial_{x_1 x_n} f(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n x_1} f(\vec{x}) & \cdots & \partial_{x_n x_n} f(\vec{x}) \end{pmatrix} ; \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

→ **Nablaoperator**:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \text{für } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Richtungsableitung, mehrdimensionale Kettenregel

→ Richtungsableitung

an der Stelle $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{a}$

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{a}} = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

Einheitsvektor

→ mehrdimensionale Kettenregel

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{R}^m \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h = f \circ g"'] & & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) \qquad \vec{x} = g(\vec{t})$$

$$h(\vec{t}) = f(g(\vec{t}))$$

$$h'(\vec{t}) = f'(g(\vec{t})) \cdot g'(\vec{t})$$

$$J_h(\vec{t}) = J_f(g(\vec{t})) \cdot J_g(\vec{t})$$

Bsp.:

$$g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix} \begin{matrix} \to u \\ \to v \end{matrix} \qquad \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$$

$$g_2(u,v) = \begin{pmatrix} uv \\ u+v \\ \sin(u+v) \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

$$h(x,y,z) = g_2(g_1(x,y,z)) = g_2 \circ g_1$$

$$J_{g_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_{g_2} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+y & x+y \\ 1 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & \cos(2y+x+z) \end{pmatrix}$$

$$J_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z & x+2y+z & x+y \\ 1 & 2 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix}$$

$$= J_{g_2} \cdot J_{g_1} = \begin{pmatrix} y+z & x+y \\ 1 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mehrdimensionale Taylorpolynome

$$T_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k \cdot f(x_0,y_0)$$

Berechnung der Summanden:

1) $\frac{1}{k!}$ berechnen

2) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k \cdot f(x_0,y_0)$ berechnen

$k=0$ $\qquad 1$

$k=1$ $\qquad f_x \Delta x + f_y \Delta y$

$k=2$ $\qquad f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2$

$k=3$ $\qquad f_{xxx}\Delta x^3 + 3f_{xxy}\Delta x^2\Delta y + 3f_{xyy}\Delta x\Delta y^2 + f_{yyy}\Delta y^3$

allg.:

$$T_n(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^k f(\vec{x}) \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^m$$

Es gilt: $\quad \Delta x = (x - x_0)$

$\Delta y = (y - y_0)$

$\Delta x_i = (x_i - x_{i0})$

oder: Entwicklung aus bekannten Potenzreihen

Bsp.: Berechne $T_3(x,y)$ im Punkt $(1,-1)$

von $f(x,y) = 2x^3 - 5x^2 + 3xy - 2y^2 + 9x - 9y - 9$

$\rightarrow f(1,-1) = 1$

$f_x = 6x^2 - 10x + 9y + 9$	$f_x(1,-1) = 2$
$f_y = 3x - 4y - 9$	$f_y(1,-1) = -2$
$f_{xx} = 12x - 10$	$f_{xx}(1,-1) = +2$
$f_{xy} = 3$	$f_{xy}(1,-1) = 3$
$f_{yy} = -4$	$f_{yy}(1,-1) = -4$
$f_{xxx} = 12$	$f_{xxx}(1,-1) = 12$
$f_{xxy} = 0$	$f_{xxy}(1,-1) = 0$
$f_{xyy} = 0$	$f_{xyy}(1,-1) = 0$
$f_{yyy} = 0$	$f_{yyy}(1,-1) = 0$

$$T_3(x,y) = \underbrace{f}_{k=0} + \underbrace{(f_x \Delta x + f_y \Delta y)}_{k=1}$$
$$\underbrace{+ \frac{1}{2}\left(f_{xx} \Delta x^2 + 2 f_{xy} \Delta x \Delta y + f_{yy} \Delta y^2\right)}_{k=2}$$
$$\underbrace{+ \frac{1}{6}\left(f_{xxx} \Delta x^3 + 3 f_{xxy} \Delta x^2 \Delta y + 3 f_{xyy} \Delta x \Delta y^2 + f_{yyy} \Delta y^3\right)}_{k=3}$$

$$= 1 + \left(2(x-1) + (-2)(y+1)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 + 2 \cdot 3 \cdot (x-1)(y+1) + (-4)(y+1)^2\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\left(12(x-1)^3\right)$$

$$= 1 + 2x - 2 - 2y - 2 + (x-1)^2 + 3(x-1)(y+1) - 2(y+1)^2$$
$$+ 2(x-1)^3$$
$$= \ldots$$

$$g(x,y,z) = \frac{xyz^2}{1 - x^2 z} = xyz^2 \sum_{n=0}^{\infty} (x^2 z)^n = y \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} z^{n+2}$$

$$= y \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} z^{n+1}$$

Mehrdimensionale Extremwertaufgaben

Extremwerte von w=f(x,y)

(Für $n > 2$ siehe AUF 15.101 und **F+H.**)

Extremwerte von $w = f(x,y)$ können **nur** in Punkten auftreten, in denen

$\boxed{\text{A}}$ die partiellen Ableitungen verschwinden, also $w_x = w_y = 0$ ist (**stationäre Punkte**). $\iff$ grad $f = (0,0)$.

oder

$\boxed{\text{B}}$ die partiellen Ableitungen nicht existieren. Hierzu gehören speziell die **Randpunkte**.

praktisches Vorgehen:

$\boxed{\text{A}}$ 1.) Man berechnet die **stationären Punkte**. $\iff$ grad $f = (0,0)$.

2.) Für die stationären Punkte berechnet man:

$$\boxed{D = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{xy} & w_{yy} \end{vmatrix} = w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2}$$

Hesse-Matrix hier: für $f(x,y)$

3.) $D > 0$ und $w_{xx} < 0$ (bzw. $w_{yy} < 0$) $\Longrightarrow$ rel. **Maximum**
$D > 0$ und $w_{xx} > 0$ (bzw. $w_{yy} > 0$) $\Longrightarrow$ rel. **Minimum**
$D < 0$ kein Extremwert (**Sattelpunkt**)
$D = 0$ muß gesondert untersucht werden.

$\boxed{\text{B}}$ 1.) Man berechnet die **Randextremwerte**.
2.) Man untersucht die verbleibenden Punkte, für die die partiellen Ableitungen nicht existieren.

1.) Einsetzen

Kann man die NB $G(x,y) = 0$ so in $w = f(x,y)$ einsetzen, daß eine Variable wegfällt, so braucht man nur noch eine Funktion einer Veränderlichen auf Extremwerte zu untersuchen (siehe Seite 269)!

2.) Verfahren von Lagrange

(a) $L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda G(x,y)$ heißt *Lagrangesche Hilfsfunktion*. Man sucht die (x,y), für die $L_x = L_y = L_\lambda = 0$ ist (notwendige Bed.).

(b) Unter den nach (a) bestimmten Punkten ermittelt man die Extrema.

Nebenbedingung: $G(x,y) = 0$

Hessematrix positiv definit:
alle Hauptachsenabschnittsdeterminanten positiv
$(D_k > 0)$ —> relatives Minimum

Hessematrix negativ definit:
$(-1)^k D_k > 0$ —> relatives Maximum

indefinit wenn mindestens ein $D_k < 0$
—> Sattelpunkt

Bsp.: Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion $h(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$ auf der Menge $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$\text{grad } h(x,y) = (6x^2 - 3y \;,\; -3x + 6y^2) = 0$$

$$\text{I} \quad 6x^2 - 3y = 0 \qquad \text{II} \quad -3x + 6y^2 = 0$$

$$2x^2 = y \qquad\qquad 2y^2 = x$$

II in I
$$2 \cdot (2y^2)^2 - y = 0$$
$$8y^4 - y = 0$$
$$y(8y^3 - 1) = 0$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{1}{2}$$
$$\rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

stationäre Pkt.: $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$H_f = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix} \qquad h(0,0) = -3 \qquad h(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = -\frac{13}{4}$$

Randverhalten:

oberer Rand:

$$h(x,1) = 2x^3 - 3x - 1 \qquad \frac{\partial}{\partial x} h(x,1) = 6x^2 - 3 = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{h(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1) = \sqrt{2} - 1}$$

$$h(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1) = -\sqrt{2} - 1$$

absolute Maxima

$$h(-1,1) = 0 \qquad h(1,1) = -2$$

absolutes Minimum

unterer Rand:

$$h(x,-1) = 2x^3 + 3x - 5 \qquad \frac{\partial}{\partial x} h(x,-1) = 6x^2 + 3 > 0$$

$$\boxed{h(-1,-1) = -10} \qquad h(1,-1) = 0$$

linker und rechter Rand durch $h(x,y) = h(y,x)$ gegeben

$$\boxed{h(1, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} - 1} \qquad h(1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2} - 1$$

Satz über implizite Funktionen für $f(x, y) = 0$

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Durch $f(x, y) = 0$ mit $f(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ ist in einer Umgebung von x_0 implizit eine Funktion $y = h(x)$ mit $y_0 = h(x_0)$ und $f(x, h(x)) = 0$ gegeben (lokale Auflösungsfunktion nach y):

Differenzieren von $f(x, y) = 0$ nach x (Kettenregel!) liefert: $f_x + f_y y' = 0$

$$\Longrightarrow \quad y'(x_0) = h'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)} = -\frac{f_x}{f_y}(x_0, y_0), \quad \text{kurz:} \quad y' = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Nochmaliges Differenzieren ergibt:

$$f_{xx} + f_{xy} \cdot y' + (f_{yx} + f_{yy} \cdot y') \cdot y' + f_y \cdot y'' = 0. \quad \text{Einsetzen } y' = -\frac{f_x}{f_y} \text{ ergibt:}$$

$$\Longrightarrow \quad y''(x_0) = h''(x_0) = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy} f_x^2}{f_y^3}(x_0, y_0),$$

wobei $f_{xx} = f_{xx}(x_0, y_0), \cdots$ ist. Man nehme die part. Abl. von f bei (x_0, y_0)!

Satz über implizite Funktionen für $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$

Es sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Durch $f(\vec{x}, y) = 0$ mit $f(\vec{x}_0, y_0) = 0$, $f_y(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$ ist in einer Umgebung von $\vec{x}_0$ implizit eine Funktion $y = h(\vec{x})$ mit $y_0 = h(\vec{x}_0)$ und $f(\vec{x}, h(\vec{x})) = 0$ gegeben (lokale Auflösungsfunktion nach y):

Für ihre Ableitung (den Gradienten) $h'(\vec{x}_0) = \operatorname{grad} h(\vec{x}_0)$ gilt:

$$\begin{aligned} h'(\vec{x}_0) = \operatorname{grad} h(\vec{x}_0) &= -\frac{1}{f_y(\vec{x}_0,y_0)} f_{\vec{x}}(\vec{x}_0, y_0) \\ &= -\frac{1}{f_y(\vec{x}_0,y_0)} (f_{x_1}(\vec{x}_0, y_0), \ldots, f_{x_n}(\vec{x}_0, y_0)). \end{aligned}$$

speziell:

$f(x, y) = 0$, $y = h(x)$ $\Longrightarrow$ $h' = -\frac{1}{f_y} f_x$ [BEI 15.38]

$f(x, y, z) = 0$, $z = h(x, y)$ $\Longrightarrow$ $h' = \operatorname{grad} h = -\frac{1}{f_z}(f_x, f_y)$ [BEI 15.39]

Satz über implizite Funktionen für $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$

Es sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$. → det ≠ 0 ⟺ invertierbar

Durch $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ mit $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$ und invertierbarer (m, m)–Matrix

$$f_{\vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \frac{\partial(f_1 \ldots f_m)}{\partial(y_1 \ldots y_m)} = \begin{pmatrix} f_{1y_1} & \cdots & f_{1y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{my_1} & \cdots & f_{my_m} \end{pmatrix}$$ ist in einer Umgebung

von $\vec{x}_0$ implizit eine Funktion $\vec{y} = h(\vec{x})$ mit $\vec{y}_0 = h(\vec{x}_0)$ und $f(\vec{x}, h(\vec{x})) = \vec{0}$ gegeben (lokale Auflösungsfunktion nach $\vec{y}$):

Für ihre Ableitung (die Jacobi–Matrix) $h'(\vec{x}_0) = \mathcal{J}_h(\vec{x}_0)$ gilt:

$$h'(\vec{x}_0) = \mathcal{J}_h(\vec{x}_0) = \frac{\partial(h_1 \ldots h_m)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} = -(f_{\vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0))^{-1} f_{\vec{x}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0).$$

Bsp.: Zeigen sie, dass es zwei eindeutig Bestimmte Funktionen gibt mit $u(x,y)$ und $v(x,y)$ in einer Umgebung $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\vec{g}(\underbrace{x,y}_{\vec{a}},\underbrace{u,v}_{\vec{b}}) := \begin{pmatrix} u^2 + ve^{-u} + xu - 1 \\ xy + yv + \frac{u}{v} - x \end{pmatrix} = \vec{0}$$

1. Bedingung:

$$\vec{g}(0,0,u,v) = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} u^2 + ve^{-u} - 1 \\ \frac{u}{v} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\left.\begin{array}{ll} u = 0 \wedge v \neq 0 & (II) \\ v - 1 = 0 \iff v = 1 & (I) \end{array}\right\} \text{Lösungspkt. von } \vec{g} = \vec{0} \text{ ist } (0,0,0,1) =: (\vec{a}_0, \vec{b}_0)$$

2. Bedingung:

$$g_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 2u - ve^{-u} + x & e^{-u} \\ \frac{1}{v} & y - \frac{u}{v^2} \end{pmatrix}$$

$$g_{\vec{b}}(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det |g_{\vec{b}}(0,0,0,1)| = -1 \neq 0$$

$\longrightarrow$ Es gibt in der Umgebung $(x_0, y_0) = (0,0)$ zwei Funktionen $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ mit $u(0,0) = 0$ und $v(0,0) = 1$ mit $g(x,y,u(x,y),v(x,y)) = \vec{0}$ u, v sind dabei eindeutig Bestimmt

$$\vec{b}'(\vec{a}) = -(g_{\vec{b}}(0,0,0,1))^{-1} \cdot g_{\vec{a}}(0,0,0,1)$$

$\rightarrow (g_{\vec{b}}(0,0,0,1))^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad g_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ y-1 & x+v \end{pmatrix} \Rightarrow g_{\vec{a}}(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}'(\vec{a}) = \vec{b}'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } u(x_0,y_0) \\ \text{grad } v(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Volumen- und Bereichsintegrale

Flächeninhalt eines Gebietes G:

$$F = \iint\limits_G 1 \, dG = \iint\limits_G 1 \, dx \, dy$$

Ist G Sektor $0 \leq r \leq r(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$

$$F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) \, d\varphi$$

Volumen des Bereichs V:

$$V = \iiint\limits_V 1 \, dV = \iiint\limits_V 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f(x) \cdot g(y) \cdot h(z) \, dz \, dy \, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \cdot \int_{y_0}^{y_1} g(y) dy \int_{z_0}^{z_1} h(z) dz}$$

Anwendung dreifacher Integrale

Es sei $\rho = \rho(x, y, z)$ die **Massendichte** des Körpers K und a der **Abstand** des Massenelementes $dM := \rho \, dV$ von der Drehachse A.

Volumen von K :	$V = \iiint\limits_K dV$	BEI 17.12, 17.18.
Gesamtmasse von K :	$M = \iiint\limits_K \rho \, dV$	BEI 17.13.
Trägheitsmoment von K bzgl. der Drehachse:	$T = \iiint\limits_K a^2 \rho \, dV$	BEI 17.14, 17.16, 17.17, 17.18.
Massenmittelpunkt[1] von K :	$x_m = \frac{1}{M} \iiint\limits_K x \rho \, dV$	
	$y_m = \frac{1}{M} \iiint\limits_K y \rho \, dV$	BEI 17.15
	$z_m = \frac{1}{M} \iiint\limits_K z \rho \, dV$	

[1] Ist $\rho = 1$, so ist der Massenmittelpunkt der geometrische Schwerpunkt.

Koordinatentransformation bei Mehrfachintegralen

→ **Doppelintegrale** $\iint\limits_G f\,dG \qquad dG = dx\,dy$

$$x = x(u,v) \qquad \qquad y = y(u,v)$$

$$dG = \underbrace{\left| \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right|}_{\text{Betrag d. Funktionaldeterminanten}} dv\,du$$

Bsp.: Polarkoordinaten

$$x(r,\varphi) = r \cdot \cos\varphi$$
$$y(r,\varphi) = r \cdot \sin\varphi$$

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{vmatrix} = \cos\varphi \cdot r\cdot\cos\varphi - \sin\varphi\cdot(-r\cdot\sin\varphi$$

$$= r\cos^2\varphi + r\cdot\sin^2\varphi = r\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

$$dG = r\,d\varphi\,dr$$

→ **Dreifachintegrale** $\iiint\limits_V f\,dV \qquad dV = dx\,dy\,dz$

$$x = x(u,v,w) \qquad y = y(u,v,w) \qquad z = z(u,v,w)$$

$$dV = \underbrace{\left| \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \right|}_{\text{Betrag d. Funktionaldeterminanten}} du\,dv\,dw$$

Bsp.: Zylinderkoordinaten

$$x(r,\varphi,z) = r\cdot\cos\varphi$$
$$y(r,\varphi,z) = r\cdot\sin\varphi$$
$$z(r,\varphi,z) = z$$

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \longrightarrow$$

Rückseite

$$= \cos\varphi \cdot \begin{vmatrix} r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \sin\varphi \cdot \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

bei Kugelkoordinaten : $dV = r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

Rotationskörper

→ **Volumen** von Rotationskörpern (um x-Achse)

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

→ **Oberfläche** von Rotationskörpern (um x-Achse)

$$O = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Bsp: Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= \left[\pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

Bsp.: Kugeloberfläche

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$O = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} r \, dx = 4\pi r^2$$

Divergenz, Rotation, Gradient

→ Divergenz

$$\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \qquad \vec{v} \in \mathbb{R}^2$$

allg.:

$$\text{div}\,\vec{v}\cancel{(\vec{x})} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \qquad \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Bsp.:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ x^2yz^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{div}\,\vec{v} = y + 0 + x^2y\,2z = y + 2x^2yz$$

→ Rotation

$$\text{rot}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \text{rot}\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$$

Bsp.:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ x^2yz^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rot}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz), \frac{\partial}{\partial z}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^2), \frac{\partial}{\partial x}(xz)\frac{\partial}{\partial y}(xy\right.$$

$$\text{rot}\,\vec{v} = \left(x^2z^2 - x, -2xyz^2, z - x\right)$$

Kurven- oder Wegintegrale

$\vec{x}(t)$: Parameterdarstellung einer Raumkurve

Länge d. Kurvenstücks (Bogenlänge):

$$l(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\vec{x}}(\tau)\| \, d\tau$$

⇒ muss nach t aufgelöst werden ⇒ $t(l)$

↓

einsetzen in $\dot{\vec{x}}(t)$

⇒ $\dot{\vec{x}}(l)$

Krümmung der Kurve:

$$K(l) = \|\ddot{\vec{x}}(l)\| \longleftarrow$$

infinitesmal kleines Bogenelement

skalar!

$$\int_K f \, ds = \int_a^b f(\vec{x}(t)) \cdot \|\dot{\vec{x}}(t)\| \cdot dt$$

für reelwertige Funktionen

Kurvenstück $K = \{ \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n \mid a \leq t \leq b \}$

$$\int_K \vec{f} \, d\vec{x} = \int_a^b \vec{f}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) \cdot dt$$

für vektorwertige Funktionen

infinitesmal kleines Bogenelement

vektoriell!

Satz von Gauss

ebenes Bereichsintegral

$$\iint_B \operatorname{div} \vec{f} \, d(x,y) = \oint_{\partial B} (\vec{f} \cdot \vec{n}) \, ds \qquad \text{für } \mathbb{R}^2 \quad \vec{f} \in \mathbb{R}^2$$

Normalenvektor an die Kurve ∂B (zeigt aus B hinaus)

Satz von Stokes

$$\iint_F \operatorname{rot} \vec{f} \, d\vec{F} = \oint_{\partial F} \vec{f} \cdot d\vec{x} \qquad \text{für } \mathbb{R}^3 \quad \vec{f} \in \mathbb{R}^3$$

Oberflächenintegral

Kurvenintegrale

$$\vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} \right\|}$$

ist äußerer Normalenvektor an die Kurve ∂B (zeigt aus B hinaus)

Bsp.:

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} y(t) &= \sin t & \dot{y}(t) &= \cos t \\ x(t) &= \cos t & \dot{x}(t) &= -\sin t \end{aligned} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Potentialfelder (Gradientenfelder)

Wann ist $\vec{f}$ Gradientenfeld?

$\rightarrow$ wenn gilt $\operatorname{rot}\vec{f} = \vec{0}$

oder $J_{\vec{f}} = J_{\vec{f}}^T$ (symmetrisch)

folgt daraus

Was gilt für Gradientenfeld?

$$\int_K \vec{f}\,d\vec{x} = \Phi(\vec{x}(b)) - \Phi(\vec{x}(a))$$

$$\oint_K \vec{f}\,d\vec{x} = 0 \qquad \Phi: \text{Potentialfkt.}$$

$$\vec{f} = \operatorname{grad}\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$$

Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y} \qquad \text{im } \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \qquad \text{im } \mathbb{R}^2$$

Überprüfe ob $\vec{f}$ Gradientenfeld und bestimme ggf. die Potentialfkt. Φ

Bsp.:

$$\vec{f} = (1 + y(1+z),\ x(1+z),\ xy)$$

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x(1+z)),\ \frac{\partial}{\partial z}(1+y(1+z)) - \frac{\partial}{\partial x}(xy),\ \frac{\partial}{\partial x}(x(1+z)) - \frac{\partial}{\partial y}(1+y(1+z))\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \begin{pmatrix} x-x \\ y-y \\ z-z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Phi_x = 1 + y + yz \rightarrow \Phi = x + xy + xyz + c(y,z)$$

$$\Phi_y = x + xz \rightarrow \Phi = xy + xyz + c(x,z)$$

$$\Phi_z = xy \rightarrow \Phi = xyz + c(x,y)$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y,z) = x + xy + xyz + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Oberflächenintegrale

$\vec{x}(u,v)$: Parameterdarstellung einer Fläche im Raum

Flächeninhalt des Flächenstücks

$$I(F) = \iint_B |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| \, d(u,v)$$

$z = f(x,y)$: explizite Darstellung der Fläche im Raum

Flächeninhalt des Flächenstücks

$$I(F) = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, d(x,y)$$

infinitesmal kleines Flächenelement

skalar!

$$\int_F f \, dF = \iint_B f(\vec{x}(u,v)) \cdot \underbrace{\| \vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v) \|}_{\text{Betrag des Normalenvektors}} \, dB$$

für reellwertige Funktionen

Flächenstück $F = \{ \vec{x}(u,v) \mid (u,v) \in B \}$; $dB = d(u,v)$

$$\int_F \vec{f} \, d\vec{F} = \iint_B \vec{f}(\vec{x}(u,v)) \cdot \underbrace{(\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v))}_{\text{Normaleneinheitsvektor}} \, dB$$

für vektorwertige Funktionen

infinitesmal kleines Flächenelement

vektoriell!

Satz von Gauss

räumliches Bereichsintegral

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{f} \, dV = \oiint_{\partial V} \vec{f} \, d\vec{F} \qquad \vec{f} \in R^3$$

Satz von Stokes

$$\oint_{\partial F} \vec{f} \, d\vec{x} = \iint_F \operatorname{rot} \vec{f} \, d\vec{F} \qquad \vec{f} \in R^3$$

Kurvenintegral

Oberflächenintegrale