Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Herbst 2012
17.09.2012

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 $\quad$ $(5+1+1+3=10$ Punkte$)$

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ Ihrer Wahl den Vektor $A^{2012}x$.

d) Im Vektorraum $C^0(\mathbb{R})$ der auf $\mathbb{R}$ stetigen Funktionen seien Funktionen $b_1, b_2, b_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$b_1(x) = \cos^2(x)\,, \qquad b_2(x) = \sin^2(x)\,, \qquad b_3(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Durch $U := \operatorname{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$ wird ein Untervektorraum von $C^0(\mathbb{R})$ definiert, der von der Basis b_1, b_2, b_3 aufgespannt wird. (Dies muss nicht begründet werden.) Die Abbildung $\phi\colon U \to U$ sei linear und besitze die obige Matrix A als Darstellungsmatrix bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3. Definiere $v(x) := 1 - x + \cos^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass $v \in U$ ist, und bestimmen Sie $\phi(v)$.

Aufgabe 2 $\quad$ $(6+4=10$ Punkte$)$

a) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto 3y^2 - 6xy + 9x - x^3 + 2\,,$$

und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar. Die Komponentenfunktionen von f werden mit $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bezeichnet, so dass

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ist. Weiter sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und es gelte

$$f_1 = \varphi \circ f_2 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^2\,,$$

d.h. $f_1(x,y) = \varphi(f_2(x,y))$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie

$$\det Df(x,y) = 0 \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Hinweis zur Notation: $Df = f'$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 $(5+5=10$ Punkte$)$

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} 2xg(y)+y \\ 2(x^2+1)g(y)+x \end{pmatrix},$$

wobei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

Bestimmen Sie g so, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ ist und $g(0)=1$ gilt, und ermitteln Sie für dieses g ein Potential von $\vec{v}$.

b) Die Oberfläche von

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2\right\}$$

werde mit $\mathcal{F}$ bezeichnet und es sei

$$\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy-z \\ x+y^2+1 \\ x-y \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Berechnen Sie den Fluss von $\vec{w}$ durch die Oberfläche $\mathcal{F}$ nach außen, d.h.

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do\,,$$

wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor auf $\mathcal{F}$ ist, der ins Äußere von V weist.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, den 09.10.2012, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Donnerstag, den 18.10.2012, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Tulla-Hörsaal (Geb. 11.40) statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 22.10.2012 bis 26.10.2012 im Allianz-Gebäude 05.20.