Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Herbst 2012
17.09.2012

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \overset{Z_3 \to Z_3 + Z_2}{=} \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{S_2 \to S_2 - S_3}{=} \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. } Z_3}{=} (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\big(-\lambda(2-\lambda)+1\big) = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2 .$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $1, 2$.

Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(1) = \operatorname{Kern}(A - I_3) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \} ,$$

$$E_A(2) = \operatorname{Kern}(A - 2I_3) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \} .$$

b) Wie im a)-Teil nachgerechnet, ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gleich 2, während seine geometrische Vielfachheit 1 beträgt. Demnach stimmen die algebraische und die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 nicht überein, so dass die Matrix A nicht diagonalisierbar ist.

c) Ist $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt $Ax = \lambda x$. Hieraus folgt induktiv $A^{2012}x = \lambda^{2012}x$. Wähle beispielsweise $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 1$, so dass sich $A^{2012}x = 1^{2012}x = x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt.

d) Wegen $v(x) = 2\cos^2 x + \sin^2 x - x = 2b_1(x) + b_2(x) - b_3(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ist v eine Linearkombination von b_1, b_2, b_3 und somit in U enthalten. Außerdem lauten die Koordinaten von v bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Daher ergibt sich für die Koordinaten von $\phi(v)$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix},$$

woraus $(\phi(v))(x) = -b_1(x) + 4b_2(x) - 4b_3(x) = -\cos^2 x + 4\sin^2 x - 4x$, $x \in \mathbb{R}$, folgt.

Aufgabe 2

a) Zweimalige Anwendung der Kettenregel zeigt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Gradient von f lautet

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -6y + 9 - 3x^2 \\ 6y - 6x \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

und verschwindet genau dann, wenn $-6y + 9 - 3x^2 = 0$ und $x = y$ gelten. Setzt man $x = y$ in die erste Gleichung ein und dividiert diese durch -3, so ergibt sich $y^2 + 2y - 3 = 0$, was wegen $y^2 + 2y - 3 = (y-1)(y+3)$ genau für $y = 1$ oder $y = -3$ erfüllt ist.

Damit sind $(1,1)$ und $(-3,-3)$ alle kritischen Punkte von f.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ ist wegen $\det H_f(1,1) = -72 < 0$ indefinit. Daher besitzt f in $(1,1)$ einen Sattelpunkt und kein lokales Extremum.

$H_f(-3,-3) = \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, denn $18 > 0$ und $\det \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 72 > 0$ (Hurwitz-Kriterium). Daher besitzt f in $(-3,-3)$ ein lokales Minimum.

b) Für die Ableitung Df von f an der Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$(Df)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(x,y) & \partial_y f_1(x,y) \\ \partial_x f_2(x,y) & \partial_y f_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Gemäß Voraussetzung existiert eine differenzierbare Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1 = \varphi \circ f_2$ auf $\mathbb{R}^2$. Nach der Kettenregel ergibt sich für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_x f_1(x,y) = \partial_x(\varphi \circ f_2)(x,y) = \varphi'(f_2(x,y))\, \partial_x f_2(x,y)$$

sowie

$$\partial_y f_1(x,y) = \partial_y(\varphi \circ f_2)(x,y) = \varphi'(f_2(x,y))\, \partial_y f_2(x,y).$$

Dies führt auf

$$(Df)(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi'(f_2(x,y))\, \partial_x f_2(x,y) & \varphi'(f_2(x,y))\, \partial_y f_2(x,y) \\ \partial_x f_2(x,y) & \partial_y f_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Da die erste und die zweite Zeile von $(Df)(x,y)$ linear abhängig sind, folgt $\det(Df)(x,y) = 0$.

Aufgabe 3

a) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $\vec{v}$ ein C^1-Vektorfeld ist, stellt $\vec{v}$ genau dann ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ dar, wenn die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind.

Ist $\vec{v}(x,y) =: \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix}$ gesetzt, so gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\partial_y v_1(x,y) = 2xg'(y) + 1 \qquad \text{und} \qquad \partial_x v_2(x,y) = 4xg(y) + 1\,.$$

Daher ergibt sich

$$\partial_y v_1(x,y) = \partial_x v_2(x,y) \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2xg'(y) = 4xg(y) \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}\,.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $g'(y) = 2g(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt, also genau für $g(y) = Ce^{2y}$, $y \in \mathbb{R}$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Die Forderung $g(0) = 1$ führt auf $C = 1$.

Fazit: Ist $g(y) := e^{2y}$, $y \in \mathbb{R}$, gesetzt, so gilt $g(0) = 1$ und $\vec{v}$ stellt ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ dar.

Nun berechnen wir ein zugehöriges Potential $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f = \vec{v}$. Wegen $\partial_x f(x,y) \overset{!}{=} v_1(x,y) = 2xe^{2y} + y$ gilt $f(x,y) = x^2e^{2y} + xy + h(y)$ für eine differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_y f(x,y) = 2x^2e^{2y} + x + h'(y)$ und $\partial_y f(x,y) \overset{!}{=} v_2(x,y) = 2(x^2+1)e^{2y} + x$ folgt $h'(y) = 2e^{2y}$; dies ist beispielsweise für $h(y) = e^{2y}$, $y \in \mathbb{R}$, erfüllt. Somit gilt $\operatorname{grad} f = \vec{v}$ z.B. für $f(x,y) = (x^2+1)e^{2y} + xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Offenbar ist $\vec{w} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Der Divergenzsatz liefert

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{V} (\nabla \cdot \vec{w}\,)(x,y,z)\, d(x,y,z) = 3 \iiint\limits_{V} y\, d(x,y,z)\,.$$

Mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ und $d(x,y,z) = r\,d(r,\varphi,z)$, wobei $r \in [1,2]$, $\varphi \in [0,\pi]$ und $z \in [0, r^2\cos^2\varphi]$, erhält man

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do = 3 \iiint\limits_{V} y\, d(x,y,z) &= 3 \iiint\limits_{[1,2]\times[0,\pi]\times[0,r^2\cos^2\varphi]} r\sin\varphi\, r\, d(r,\varphi,z) \\
&= 3 \int_1^2 \int_0^\pi \int_0^{r^2\cos^2\varphi} r^2 \sin\varphi\, dz\, d\varphi\, dr = 3 \int_1^2 \int_0^\pi r^4 \cos^2\varphi\, \sin\varphi\, d\varphi\, dr \\
&= 3 \int_1^2 r^4 \big[-\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi\big]_{\varphi=0}^{\pi}\, dr = 2 \int_1^2 r^4\, dr = \frac{2}{5}\,\big[\,r^5\,\big]_{r=1}^2 = \frac{62}{5}\,.
\end{aligned}$$