Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2014
24.09.2014

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (6+4 Punkte)

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie S^{-1} und $S^{-1}AS$ an.

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2 \\ 6xy \end{pmatrix}$$

und die Kurve

$$\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 5+t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 7z^2 - 3xyz + x^5 + y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0,-2,1)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x,y)$ die Ableitung $g'(x,y)$.

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon (0,\frac{\pi}{2}) \times (0,\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y).$$

Hinweis: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (3+4+3 Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 5yz + \cos(x+y-z) \\ 5xz + \cos(x+y-z) \\ 5xy - \cos(x+y-z) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie ein zugehöriges Potential.

b) Es sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leqslant x + y\}$. Berechnen Sie $\iint\limits_K (x+y)\, d(x,y)$ und den Flächeninhalt von K.

c) Die Oberfläche von $D := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x-1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ -1 \leqslant z \leqslant 1\big\}$ wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet, und es sei

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2x + 2yz + z^2 \\ x^2 z + 2yz \\ x^2 + y - z^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do\,,$$

wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Gebietes D weist.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab **15.10.2014**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`http://www.math.kit.edu/iana1/`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet am Mittwoch, den **22.10.2014**, von 16 bis 18 Uhr im Hörsaal am Fasanengarten (Geb.50.35) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **27.10.2014** bis **31.10.2014**.