Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Sommersemester 2014
24.09.20014

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Für das charakteristische Polynom von $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1) = (\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-2)\,.$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $1, \frac{1}{2},\ 2$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2\to 2Z_1-2Z_2;\, Z_1\to 2Z_1-Z_2]{Z_3\to Z_3-Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(1) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Nun zur Berechnung der Eigenvektoren zu dem Eigenwert $\frac{1}{2}$.

$$A - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3\to Z_3-Z_2]{Z_2\to 2(Z_2-Z_1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \xrightarrow[Z_1\to Z_1+Z_3]{Z_3\to Z_3+Z_2;\, Z_2\to 2Z_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Wir bekommen mit Hilfe des (-1) Ergänzungstricks, dass

$$E_A(\frac{1}{2}) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

gilt. Ähnlich bekommen wir, dass

$$E_A(2) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

gilt. Die Vektoren $y_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $y_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind die Eigenvektoren von A.

b) Die Vektoren y_1 ,y_2 und y_3 sind orthogonal , aber nicht normiert. Wir normieren die Vektoren y_1, y_2, und y_3 und bekommen die Orthonormalbasis $v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_3 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Daraus folgt, dass

$S = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$S^{-1}AS = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gilt.

Aufgabe 2

a) Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3(5+t)^2 - t^4 \\ 6t^2(5+t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (75 + 30t + 3t^2 - t^4 + 12t^3(5+t))\, dt = 108,2\,. \end{aligned}$$

b) Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0,-2,1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,-2,1) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z^3 + 7z^2 - 3xyz + x^5 + y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0,-2,1) = 1 + 7 + (-2)^3 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 7z - 3xy\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,-2,1) = 3 + 7 = 11 \neq 0\,,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\big(x,y,g(x,y)\big) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 7g(x,y) - 3xy} \begin{pmatrix} -3yg(x,y) + 5x^4 \\ -3xg(x,y) + 3y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Es gilt $\nabla f(x,y) = (\cos x - \sin(x-y), -\sin y + \sin(x-y)) \overset{!}{=} (0,0)\,, x,y \in (0,\frac{\pi}{2})$ genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{2} + (x-y)$ und $y = x - y$ ist. Somit gilt $x = 2y, 3y = \frac{\pi}{2}$. Die Funktion f besitzt auf $(0,\frac{\pi}{2}) \times (0,\frac{\pi}{2})$ genau einen kritischen Punkt $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$.

Die Hesse-Matrix $H_f$der Funktion f an der Stelle $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ ist $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte λ_1, λ_2 von $H_f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ sind die Lösungen der Gleichung $H_f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) - \lambda I = \lambda^2 + 2\sqrt{3}\lambda + \frac{9}{4} = 0$.
Offensichtlich gilt $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ weil $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{9}{4} > 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\sqrt{3} > 0$.
Die Funktion f hat im Punkt $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 3

a) Die Funktion $\vec{v}$ ist stetig differenzierbar. $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, wenn also $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$. Es gilt

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - \sin(x+y-z) - 5x + \sin(x+y-z) \\ 5y + \sin(x+y-z) - 5y - \sin(x+y-z) \\ 5z - \sin(x+y-z) - 5z + \sin(x+y-z) \end{pmatrix} = \vec{0}\,.$$

Es sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein zugehöriges Potential. Da $\partial_x g(x,y,z) = 3x^2 + 5yz + \cos(x+y-z)$ gelten soll, ergibt sich

$$g(x,y,z) = x^3 + 5xyz + \sin(x+y-z) + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion c. Es folgt $\partial_y g(x,y,z) = 5xz + \cos(x+y-z) + \partial_y c(y,z)$, und dies soll $== 5xz + \cos(x+y-z)$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(x,y) = 0$, also $c(y,z) = c(z)$ gilt.Somit:

$$g(x,y,z) = x^3 + 5xyz + \sin(x+y-z) + c(z)\,.$$

Hieraus folgt $\partial_z g(x,y,z) = 5xy - \cos(x+y-z) + c'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $c'(z) = 0$. Wir wählen $d(z) = 0$ und haben damit das Potential

$$g(x,y,z) = x^3 + 5xyz + \sin(x+y-z)\,.$$

b) Es seien $u = x - \frac{1}{2}$ und $v = y - \frac{1}{2}$. Dann gilt offensichtlich

$$x^2 + y^2 \leqslant x + y \Longleftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow u^2 + v^2 \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Daraus folgt, dass $\displaystyle\iint\limits_K (x+y)\,d(x,y) = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\frac{1}{2}} (u+v+1)\,d(u,v)$ ist. Wegen der Symmetrie des Gebietes gilt $\displaystyle\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\frac{1}{2}} u\,d(u,v) = 0$ und $\displaystyle\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\frac{1}{2}} v\,d(u,v) = 0$. Daraus folgt, dass

$\displaystyle\iint\limits_K (x+y)\,d(x,y) = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\frac{1}{2}} d(u,v) = \frac{\pi}{2}$ ist.

Auch die Flächeninhalt von K ist $\frac{\pi}{2}$.

c) Nach dem Gaußschen Integralsatz bzw. dem Divergenzsatz ist

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iiint\limits_D (\nabla\cdot\vec{v}\,)\,d(x,y,z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla\cdot\vec{v})(x,y,z) = \partial_x(2x+2yz+z^2) + \partial_y(x^2z+2yz) + \partial_z(x^2+y-z^2) = 2 + 2z - 2z = 2\,.$
Daraus folgt, dass $\displaystyle\iiint\limits_D (\nabla\cdot\vec{v}\,)\,d(x,y,z) = 2{\cdot}\mathrm{vol}(D) = 2\cdot\pi\cdot 2^2\cdot 2 = 16\pi$

ist.