Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Herbst 2015
18.09.2015

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 Punkte)

a) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Lösungvorschlag: $\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+\lambda-6 = (\lambda-2)(\lambda+3)$, also sind die Eigenwerte 2 und -3.

$$(A-2I)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_1 = 2v_2.$$

Also ist die Menge der Eigenvektoren von A zum Eigenwert 2 die Menge $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ähnlich ist

$$(A+3I)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_2 = -2v_1.$$

Also ist die Menge der Eigenvektoren von A zum Eigenwert -3 die Menge $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+e^{\sin y} \\ 1+xe^{\sin y}\cos y \\ 2z \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.

Lösungsvorschlag: $\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \cos y e^{\sin y} - \cos y e^{\sin y} \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Da dazu $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld.

Jetzt suchen wir eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \vec{v}$. Dann $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + e^{\sin y}$ also $f(x,y,z) = x + xe^{\sin y} + h(y,z)$. Da $\frac{\partial f}{\partial y} = v_2 = 1 + xe^{\sin y}\cos y$ bekommen wir $xe^{\sin y}\cos y + \frac{\partial h}{\partial y} = 1 + xe^{\sin y}\cos y \implies \frac{\partial h}{\partial y} = 1$. Also $h(y) = y + c(z)$. Deshalb ist $f(x,y,z) = x + xe^{\sin y} + y + c(z)$. Da aber $2z = \frac{\partial f}{\partial z} = c'(z)$ bekommen wir, dass $c(z) = z^2$ eine Mögliche Wahl für die Funktion $c(z)$ ist. Deshalb ist $f(x,y,z) = x + xe^{\sin y} + y + z^2$ ein Potential für das Vektorfeld $\vec{v}$.

c) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag Mittels Zeilenumformungen, bekommen wir (die Zeilen werden mit Z_1, Z_2, Z_3 bezeichnet).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - \frac{1}{2}Z_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_2, Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Deshalb ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (4 + 2 + 4 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x^2}{2} + y^2 + y - x$, und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + y^2 \leqslant 3\}$. Bestimmen Sie das Minimum und Maximum von f in B.

Lösungsvorschlag: Erst suchen wir die kritischen Punkte, die im Bereich B liegen. $\nabla g = 0 \iff \begin{pmatrix} x-1 \\ 2y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (1, -\frac{1}{2})$ und $(1, -\frac{1}{2})$ liegt im B da $\frac{1^2}{2} + (-\frac{1}{2})^2 < 3$. Also ist die Zahl $g(1, -\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ ein Extremwertkandidat.

Jetzt suchen wir die Extremwerte am $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + y^2 = 3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$, wobei $h(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - 3$. Auf ∂B ist $f(x, y) = g(x, y)$, wobei $g(x, y) = 3 + y - x$. Deshalb reicht es die Extremwerte von g auf ∂B zu finden. Da $\nabla h = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0$ auf ∂B, bekommen wir mit Hilfe der Multiplikationsregel von Lagrange $\nabla g = \lambda \nabla h \implies \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$. Da $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, bekommen wir $\lambda \neq 0$. Deshalb $x = -\frac{1}{\lambda}, y = \frac{1}{2\lambda}$ und da h(x,y)=0 bekommen wir $\frac{3}{4\lambda^2} = 3$ oder $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Wenn $\lambda = -\frac{1}{2}$ (bzw $\frac{1}{2}$) dann ist $(x, y) = (2, -1)$ (bzw. $(-2, 1)$). Aber $g(2, -1) = 0$ und $g(-2, 1) = 6$. Deshalb sind die 0,6 auch Extremwertkandidaten.

Also $\max f = \max\{0, 6, -\frac{3}{4}\} = 6, \min f = \min\{0, 6, -\frac{3}{4}\} = -\frac{3}{4}$.

b) Sei $g : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \frac{4y}{x}$ und $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\int_\gamma g ds$.

Lösungsvorschlag:

$\int_\gamma g ds = \int_1^2 g(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_1^2 g(t, \frac{t^2}{2}) \| \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \| dt = \int_1^2 2t\sqrt{1 + t^2} dt$. Mit Hilfe der Substitution $u = 1 + t^2$ bekommen wir $\int_\gamma g ds = \int_2^5 \sqrt{u} du = \frac{2}{3}(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})$.

c) Skizzieren Sie den Integrationsbereich des folgenden Integrals, vertauschen Sie die Integrationsfolge und berechnen Sie ihren Wert: $\int_1^9 \int_{(y-1)^{\frac{1}{3}}}^2 \cos(\frac{x^4}{4}) dx dy$.

Lösungsvorschlag: Da für $y \geqslant 1$ gilt $x = (y - 1)^{\frac{1}{3}} \iff y = 1 + x^3$, ist der Integrationsbereich

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant y \leqslant 9, (y-1)^{\frac{1}{3}} \leqslant x \leqslant 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 1+x^3\}$

Deshalb

$$\int_1^9 \int_{(y-1)^{\frac{1}{3}}}^2 \cos\left(\frac{x^4}{4}\right) dx dy = \int_0^2 \int_1^{1+x^3} \cos\left(\frac{x^4}{4}\right) dy dx = \int_0^2 x^3 \cos\left(\frac{x^4}{4}\right) dx$$

Mit Hilfe der Substitution $u = \frac{x^4}{4}$ wird das Integral $\int_0^4 \cos(u) du = \sin(4)$.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} + y & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$.
Zeigen Sie, dass g stetig ist in (0,0) und berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Lösungsvorschlag: $0 \leqslant |g(x,y)| \leqslant 2\frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + |y| \leqslant 2|x| + |y|$, wobei die letzte Gleichheit gilt weil $x^2 \leqslant x^2 + y^2$. Da $2|x| \to 0$ und $|y| \to 0$ wenn $(x,y) \to (0,0)$ bekommen wir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$. Deshalb ist g stetig in $(0,0)$.

Jetzt berechnen wir die partiellen Ableitungen von g an der Stelle $(0,0)$. Es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{x^2}}{x} = 2.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1.$$

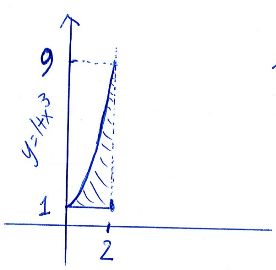
b) Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ -\frac{y^2}{2} \\ 2z + \sin x \end{pmatrix}$. Die Oberfläche von $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ wird mit ∂D bezeichnet. Berechnen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes den Ausfluss von $\vec{v}$ durch ∂D, und zwar das Integral $\iint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{N} do$, wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Bereichs zeigt.

Lösungsvorschlag:
$\text{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial x} = y - y + 2 = 2$. Deshalb ist wegen des Divergenzsatzes

$$\iint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{N} do = \iiint_D \text{div}\vec{v} d(x,y,z) = 2 \iiint_D d(x,y,z).$$

Wir stellen D mit Hilfe von Kugel Koordinaten dar ($x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$). Da $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ bekommen wir $0 \leqslant r \leqslant 1$. Da $z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$, bekommen wir $r\cos(\theta) \leqslant r\sin(\theta)$ oder $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$. Dazu gilt $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$. Deshalb, da die Jacobi Determinante $r^2 sin\theta$ ist bekommen wir $2\iiint_D d(x,y,z) = 2\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr = 4\pi \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta = \frac{4\pi}{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$. Deshalb ist der Ausfluss $\frac{4\pi}{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(2 c) Skizze des Bereichs



$x = (y-1)^{\frac{1}{3}}$

$\Longleftrightarrow y = 1 + x^3$

(3b) Skizze des Bereichs