

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und
Informationstechnik

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

- a) Es sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A . Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S , so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie die Matrix $S^{-1}AS$ an. Zeigen Sie darüber hinaus, dass für alle $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt:

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0.$$

- b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := e^{2xe^y - 2}.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom von f der Ordnung 1 um den Entwicklungspunkt $(1, 0)$. Approximieren Sie damit den Funktionswert $f(1.1, 0.2)$. Hat f lokale Extremstellen?

Aufgabe 2 (4 + 3 + 3 Punkte)

- a) Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - x + 2y, \quad g(x, y) := x^2 + y^2.$$

Bestimmen Sie das Maximum und Minimum von f in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq \frac{5}{16}\}$.

- b) Es sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\vec{v}(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ -\frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix},$$

und $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -2\pi.$$

Ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld? Begründen Sie Ihre Antwort.

- c) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{w}(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 + (2a - 1)y \\ a^2x + 2y \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{w}$ ein Potentialfeld ist und für dieses a bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.

Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 Punkte)

- a) Beweisen Sie, dass die Gleichung $f(t, x) = 0$, wobei $f(t, x) = x^4(t + 1) + x^3 + t^2x^2 - 8$, in einer Umgebung des Punktes $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ nach x auflösbar ist. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $x(t)$ die Ableitung $x'(2)$.

- b) Wir betrachten das Integral

$$\int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^1 e^{x^3} dx dy.$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

- c) Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig in $(0, 0)$ ist. Untersuchen Sie f in $(0, 0)$ auf partielle Differenzierbarkeit bezüglich x und berechnen Sie gegebenenfalls $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)

- a) Es sei das Vektorfeld $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \\ \frac{z^2}{2} + x \end{pmatrix}$$

sowie die Menge $A \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, y \geq 0, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch ∂A , genauer, das Integral $\iint_{\partial A} \vec{v} \cdot d\vec{n}$, wobei $\vec{n}$ das äußere Normalenvektorfeld an den Rand ∂A von A bezeichne.

- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse liegen ab **19.10.2017** im Internet auf der Seite des Campussystems und neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30).

Die Klausureinsicht findet am Mittwoch, den **25.10.2017**, von 16 bis 18 Uhr im Fasanengarten Hörsaal (Geb.50.35) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **30.10.2017** bis **03.11.2017**.