

$$(1a) \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-2) - 4 = \\ = \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6). \text{ Also} \\ \text{sind } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6 \text{ die Eigenwerte von } A.$$

$$(A - I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow v_2 = -2v_1 \Leftrightarrow \vec{v} \in \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$(A - 6I)\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow w_1 = 2w_2 \Leftrightarrow \vec{w} \in \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Also $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}, \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ sind die Mengen aller
Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1 bzw. 6.

$$\text{Also } S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ \vec{v} & \vec{w} \end{matrix}$$

Da A symmetrisch ist und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ist A positiv definit. Deshalb gilt

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}.$$

$$(1b) \quad f(1, 0) = e^{2 \cdot 1 e^0 - 2} = e^0 = 1.$$

$$f_x(x, y) = 2e^y e^{2xe^y - 2} \Rightarrow f_x(1, 0) = 2e^0 e^0 = 2.$$

$$f_y(x, y) = 2xe^y e^{2xe^y - 2} \Rightarrow f_y(1, 0) = 2e^0 e^0 = 2.$$

Also das Polynom lautet

$$f(1,0) + f_x(1,0)h_1 + f_y(1,0)h_2 = 1 + 2h_1 + 2h_2$$

$$\text{oder } 1 + 2(x-1) + 2y.$$

Die Approximation bekommt man wenn man max x, y durch 1,1 bzw 0,2 ersetzt:

$$1 + 2(1,1-1) + 2 \cdot 0,2 = 1 + 0,2 + 0,4 = 1,6.$$

Da $f_x(x,y) = 2e^y e^{2xe^y-2} \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
hat f keine lokale Extremstellen.

(2a) (i) kritische Punkte von f :

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2y+2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

Aber $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 > \frac{5}{16}$ also liegt $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
außerhalb der Menge A .

Jetzt untersuchen wir f auf ∂A mit
der Multiplikationsregel von Lagrange:

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2y+2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-1 = \lambda 2x \\ 2y+2 = \lambda 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 1 \\ 2y(1-\lambda) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2(1-\lambda)} \mid y = -\frac{1}{1-\lambda} \right).$$

($\lambda \neq 1$ weil $\nabla f(x,y) = \nabla g(x,y)$ unmöglich ist).

Aber auf ∂A $x^2 + y^2 = \frac{5}{16} \Rightarrow$

$$\frac{1}{9(1-\lambda)^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} = \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{5}{9(1-\lambda)^2} = \frac{5}{16} \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)^2 = 4 \Rightarrow (1-\lambda) = \pm 2.$$

$$\text{Also } \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ oder } \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Da } f\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{25}{16}$$

$$\text{und } f\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{15}{16}$$

$$\text{ist } \max f = \frac{25}{16} \text{ und } \min f = -\frac{15}{16}.$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \\ -\frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi \end{aligned}$$

Da γ geschlossen ist und $\int \vec{v} d\vec{s} \neq 0$
folgt, dass $\vec{v}$ kein Potentialfeld ist

$$(c) \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = 2a-1, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = a^2.$$

da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend
ist ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld.

$$\Leftrightarrow \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial x} \Leftrightarrow a^2 = 2a-1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\text{Für } a=1: \vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ x+2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \nabla f \Rightarrow f_x(x,y) = x^2+y \Rightarrow f = \frac{x^3}{3} + xy + g(y)$$

$$\text{Also } x+2y \stackrel{!}{=} f_y = x + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 2y$$

$$\leadsto c(y) = y^2 \quad \text{Also ist}$$

$$f = \frac{x^3}{3} + xy + y^2 \quad \text{ein zugehöriges Potential.}$$

Aufg (3a) $f_x(t, x) = 4x^3(t+1) + 3x^2 + 2xt^2 \quad (1)$

$f_t(t, x) = x^4 + 2tx^2 \quad (2)$

Also $f(2, 1) = 1^4(2+1) + 1^3 + 2 \cdot 2 \cdot 1^2 - 8 = 0$

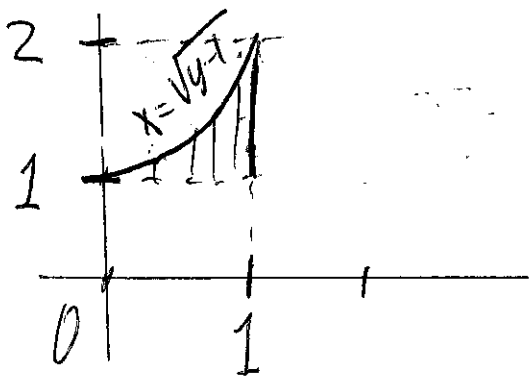
$f_x(t, x) = 4 \cdot 1^3(2+1) + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2^2 = 23 \neq 0$

Also ist $f(t, x) = 0$ Satz über die implizit definierten Funktionen auflösbar nach x in einer Umgebung von $(2, 1)$. Es gilt dann

$$x'(2) = - \frac{f_t(2, 1)}{f_x(2, 1)} = - \frac{f_t(2, 1)}{23} = - \frac{1^4 + 2 \cdot 2 \cdot 1^2}{23} = - \frac{5}{23}$$

(b). $\int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^1 e^{x^3} dx dy = \iint_B e^{x^3} d(x, y)$

wobei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, \sqrt{y-1} \leq x \leq 1\}$



untere Grenze $x = \sqrt{y-1}$

Aber $x = \sqrt{y-1} \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 = y-1$

$(\Rightarrow) y = 1 + x^2$

Aus der Skizze sieht man, dass $0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 1 + x^2$

$$\text{Also } \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^1 e^{x^3} dx dy = \int_0^1 \int_1^{1+x^2} e^{x^3} dy dx$$

$$= \int_0^1 e^{x^3} (x^2 + 1 - 1) dx = \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$$

$$= \left. \frac{e^{x^3}}{3} \right|_0^1 = \frac{e-1}{3}$$

(c) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^5 + |y|^5}{x^4 + y^4} = \underbrace{\frac{x^4}{x^4 + y^4}}_{\leq 1} |x| + \underbrace{\frac{y^4}{x^4 + y^4}}_{\leq 1} |y|$$

Da $x^4 \in x^4 + y^4$

da $y^4 \in x^4 + y^4$

$$\Rightarrow |f(x,y)| \leq |x| + |y| \rightarrow 0 \quad \text{wenn } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

Also $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Also ist

f stetig in $(0,0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{x^4} - 0}{x-0} = 1$$

Also ist f partiell differenzierbar nach

x in $(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$.

$$(4d) \quad \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-2xy) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{2} + x \right) \\ = 2x - 2x + z = z.$$

$$\text{Also} \quad \iint_{\partial A} \vec{v} \cdot d\vec{n} = \iiint_A \operatorname{div} \vec{v} \, d(x, y, z).$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, y \geq 0, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} & \swarrow \quad \searrow \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3} \quad & \varphi \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\text{da } \sin \varphi \geq 0 \text{ auf } [0, 2\pi]) \\ & (\Rightarrow \varphi \in [0, \pi]). \end{aligned}$$

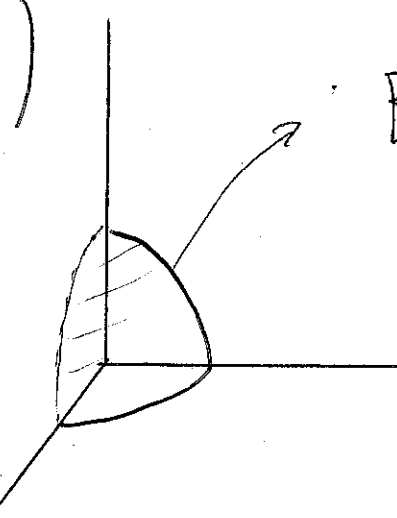
$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\Rightarrow) \quad r \cos \theta \geq r \sin \theta \quad \left(\underbrace{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}_{\text{wenn } \cos \theta \geq 0} \right)$$

$\tan \theta \leq 1$ (oder $r=0$ aber das wäre nur ein Punkt).

$$(\Rightarrow) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}. \quad \text{Also}$$

$$\begin{aligned} \iiint_A \operatorname{div} \vec{v} &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\pi} r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \cdot \pi = \end{aligned}$$

$$\frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{3}} \cdot 2\pi = \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{4} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{9\pi}{8}.$$

(b)  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$

$$z \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Also $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, (x, y) \in C\}$

wobei $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$

Also $B = \left\{ \vec{u}(x, y) : (x, y) \in C \right\}$

$$\vec{u}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{F}(B) = \iint_B 1 \, d\sigma = \iint_C \|\vec{u}_x \times \vec{u}_y\| \, d(x, y).$$

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also $\mathcal{F}(B) = \iint_C \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, d(x, y).$

Da aber $C = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \tilde{F}(B) &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+4t^2} \cdot r \, d\varphi \, dt = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1+4t^2}}_u \underbrace{t \, dt}_{\frac{du}{8}} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^5 \sqrt{u} \frac{du}{8} = \frac{\pi}{16} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^5 = \frac{\pi}{24} (5^{\frac{3}{2}} - 1). \end{aligned}$$