Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel

Sommersemester 2018
10.09.2018

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (12+8 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Seien $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^4$.

Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{y_1, y_2\}$ an.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = x^2 y\,.$$

Berechnen Sie Maximum und Minimum von f auf der Menge

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + 2y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Aufgabe 3 (10 +10 Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Kurve

$$\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^3\,,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.$$

– bitte wenden –

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + 3yz + \sin(x-z) \\ 3xz + 2y^2 \\ 3xy - \sin(x-z) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie ein zugehöriges Potential.

Aufgabe 4 (10 +10 Punkte)

a) Die Oberfläche des Paraboloids $P := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geqslant x^2 + y^2, z \leqslant 1\right\}$ wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet, und es sei

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ z - y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie unter Verwendung des Divergenzsatzes das Integral

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do\,,$$

wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Paraboloids P weist.

b) Es sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_K x \, d(x,y)\,.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Dienstag, den **16.10.2018**, neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) veröffentlicht.
Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **18.10.2018**, von **16 bis 18 Uhr** im **Hörsaal Neue Chemie (Geb.30.46)** statt.