Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W.Reichel

Sommersemester 2018
10.09.2018

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $1, 1, -1$. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(-1) = \mathrm{Kern}(A + I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \},$$
$$E_A(1) = \mathrm{Kern}(A - I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

b) Offensichtlich sind die Vektoren y_1 und y_2 linear unabhängig.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}\{y_1, y_2\}$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$v_1 := y_1, \quad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1+1+1+0}} = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\langle y_2, v_1 \rangle = -2$ und wir erhalten

$$v_2 := y_2 - \frac{\langle y_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}\{y_1, y_2\}$.

Aufgabe 2 (20 Punkte) Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Da S abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt f auf S Maximum und Minimum an. Zu deren Bestimmung untersuchen wir zunächst diese Funktion innerhalb des Gebietes $x^2 + 2y^2 < 1$. Offensichtlich gilt $\nabla f = (2xy, x^2)^T = (0, 0)^T$ genau dann, wenn $x = 0$ und für $x = 0$ gilt $f(0, y) = 0$.

Um die Funktion f am Rand zu untesuchen verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange: Ist

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1,$$

definiert, dann gilt $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ h(x,y) = 0\}$ sowie

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 4y \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{rg} h'(x,y) < 1$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für (x,y) mit $x^2 + 2y^2 = 1$nicht vorkommt. Also gilt $\operatorname{rg} h'(x,y) = 1$ für alle (x,y) am Rand von S.
Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ L(x,y,\lambda) = x^2y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1).$$

Dann gilt

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2xy + 2\lambda x \\ x^2 + 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \vec{0}$ ist äquivalent zu:

$$y + \lambda = 0 \tag{1}$$
$$x^2 - 4y^2 = 0 \tag{2}$$
$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

Aus Gleichungen (2) und (3): $x = 0$ folgt, dass $x^2 = \frac{2}{3}$ und $y^2 = \frac{1}{6}$. Wir bekommen die Lösunge $(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ und $(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.
Aufgrund von

$$f(x,0) = 0\,, \qquad (\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = -\frac{2}{3\sqrt{6}} \qquad \text{und} \qquad (\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

besitzt f auf S das Maximum $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ und das Minimum $-\frac{2}{3\sqrt{6}}$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Definitionsgemäß ist

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^\pi \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} -\sin t \cdot t \\ \cos t \cdot t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^\pi (t \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t) + 1)\, dt = \frac{\pi^2}{2} + \pi.$$

b) Die Funktion $\vec{v}$ ist stetig differenzierbar. $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, wenn also $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$. Es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 3x \\ 3y - \cos(x-z) - 3y + \cos(x-z) \\ 3z - 3z \end{pmatrix} = \vec{0}\,.$$

Es sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein zugehöriges Potential. Da $\partial_x g(x,y,z) = x^2 + 3yz + \sin(x-z)$ gelten soll, ergibt sich

$$g(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + 3xyz - \cos(x-z) + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion c. Es folgt $\partial_y g(x,y,z) = 3xz + \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= 3xz + 2y^2$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(x,y) = \frac{2}{3}y^3$, also $c(y,z) = \frac{2}{3}y^3 + d(z)$ gilt.Somit:

$$g(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + 3xyz - \cos(x-z) + \frac{2}{3}y^3 + d(z)\,.$$

Hieraus folgt $\partial_z g(x,y,z) = 3xy - \sin(x-z) + d'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $d'(z) = 0$. Wir wählen $d(z) = 0$ und haben damit das Potential

$$g(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + 3xyz - \cos(x-z) + \frac{2}{3}y^3\,.$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Nach dem Divergenzsatz ist

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iiint\limits_{Z} (\nabla\cdot\vec{v}\,)\,d(x,y,z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla\cdot\vec{v})(x,y,z) = \partial_x(z^2) + \partial_y(z-y) + \partial_z(x^2-y^2) = -1$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$, wobei $r \in [0,\sqrt{z}]$, $\phi \in [0,2\pi]$, $z \in [0,1]$, folgt

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do &= \iiint\limits_{P} (-1)\,d(x,y,z) = \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\sqrt{z}]} (-1)\,r\,d(r,\phi,z)\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} (-1)r\,dr\,d\phi\,dz = \int_0^1\int_0^{2\pi}(-1)z\frac{1}{2}d\phi\,dz\\ &= -\frac{1}{2}\pi\,.\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\iint\limits_{K} x\,d(x,y) = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dx\,dy = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\,.$$