Aufgaben und Lösungen

Tuesday, 3 August 2021 22:53

Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Sommer 2021
31.07.2021

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (6 + 8 + 4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{w}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{w}(x,y) := \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.
Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\int_\gamma \vec{w} \cdot \vec{ds}$, wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos(t) \\ e^{\sin(t)} \end{pmatrix}$.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} + x, & (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass g stetig ist in (0,0)? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Sei $\vec{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie, für die verschiedenen Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$, die Existenz der Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0)$, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = 2x - x^2 + 2y + y^2$ lokale Extremstellen besitzt.

Aufgabe 2 (4 + 8 + 8 Punkte)

a) Wir betrachten eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (3×3 Matrix). Wir nehmen an, dass die Zahlen 1 und 4 Eigenwerte von B sind, und dass der Eigenwert 4 algebraische Vielfachheit 2 hat. Ein Student behauptet, dass das Gleichungssystem $B\vec{x} + \vec{x} = \vec{c}$ lösbar ist für alle Vektoren $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Hat der Student Recht? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei $\gamma : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, mit $f(x,y,z) = z$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f ds$ und skizzieren Sie die Kurve γ. Markieren Sie in Ihrer Skizze die Schnittpunkte der Kurve mit der yz Ebene. Es ist nicht nötig die Koordinaten dieser Schnittpunkte anzugeben.

c) Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(t,x,y) \to T(t,x,y)$ mit $T_t(1,2,3) = -1$, $T_x(1,2,3) = 2$, $T_y(1,2,3) = 4$. Seien $X, Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $X(1) = 2$, $Y(1) = 3$, $X'(1) = -2$, $Y'(1) = 5$ und sei $g(t) := T(t, X(t), Y(t))$.

(i) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $g'(1)$.

(ii) Wir nehmen an, dass die Funktion $T(t,x,y)$ die Temperatur beschreibt, als Funktion der Zeit t und des Ortes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Erklären Sie den Unterschied der Bedeutung der Ableitung $g'(1)$ und der partiellen Ableitung $T_t(1,2,3)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(10 + 10 Punkte)**

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche

$$\mathcal{F} = \{ \left(u, \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2}, v \right) : (u,v) \in \mathbb{R}^2, u^2 + v^2 \leqslant 4 \}.$$

b) Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = 2x + 4y + 2z$ und $g(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$. Wir betrachten die Ebene $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 14\}$ und eine Kugel gegeben durch

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 6c^2\}, \qquad \text{wobei } c > 0.$$

Wir nehmen an, dass $c > 0$ so ist, dass die Kugel K und die Ebene E sich <u>nur in einem Punkt</u> (x_0, y_0, z_0) schneiden.

(i) Begründen Sie mit Hilfe einer Skizze warum die Vektoren $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ parallel sein müssen.

(ii) Bestimmen Sie, mit Hilfe des Teils (i), die Zahl $c > 0$ und den Punkt (x_0, y_0, z_0).

Aufgabe 4 **(8 + 4 + 10 Punkte)**

a) Wir betrachten das Integral $\int_{-1}^{1} \int_{|y|^{\frac{1}{3}}}^{1} 3x^2 e^{x^6} \, dx \, dy$. Skizzieren Sie den Integrationsbereich. Begründen Sie Ihre Skizze. Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

b) Es sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{v}(x,y,z) := (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für die Divergenz des Vektorfeldes gilt

$$\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = 6(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

c) Sei

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant \min\left\{ \sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\} \}.$$

(i) Erstellen Sie eine Skizze des Bereichs A. In der Skizze sollen die x, y, z Achsen auftauchen. Begründen Sie Ihre Skizze.

(ii) Sei $\vec{v}$ das gleiche Vektorfeld wie im Teil **b)**. Mit Hilfe des Teils **b)**, des Divergenzsatzes und Mittels Kugelkoordinaten berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch ∂A, genauer, das Integral $\iint_{\partial A} \vec{v} \cdot \vec{n} do$, wobei $\vec{n}$ das äußere Normalenvektorfeld an den Rand ∂A von A bezeichne.

Viel Erfolg!

Auf 1a. $\frac{\partial}{\partial y} w_2 = 3$, $\frac{\partial}{\partial x} w_1 = 3$ $\Big\}$ $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend $\Longrightarrow$ $\vec{w}$ ist Potentialfeld.

Wir wollen $\nabla f = \vec{w} \iff \begin{cases} f_x = 2x+3y & (1) \\ f_y = 3x+4y & (2) \end{cases}$

$(1) \to f = x^2+3xy+c(y) \Rightarrow f_y = 3x + c'(y) \overset{(2)}{\Longrightarrow}$

$c'(y) = 4y$. $\rightsquigarrow$ $c(y) = 2y^2$ ist eine mögliche Wahl.

Also ist $f(x,y) = x^2+3xy+2y^2$ ein zugehöriges Potential.

$$\int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s} = \vec{w}(\gamma(2\pi)) - \vec{w}(\gamma(0)) = 0$$

Da cos, sin 2π periodisch und deshalb $\gamma(2\pi) = \gamma(0)$.

(b) (i) Da $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, $\left(0,\frac{1}{n}\right)$ und

$$g\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \to \frac{1}{2}$$

$$g\left(0,\frac{1}{n}\right) = 0 \to 0.$$

existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ nicht deshalb ist g für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ stetig.

(ii) $$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h\vec{v}+\vec{0}) - g(\vec{0})}{h} \overset{\vec{v}=(1,1)}{=\!=} \lim_{h\to 0} \frac{g(h,h)-g(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2+h^2} + h - \alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}-\alpha}{h} + 1.$$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2+h^2}\;\sqrt{h}-\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\alpha}{h}+1.$

Also wenn $\alpha \neq \frac{1}{2}$ existiert sie nicht

wenn $\alpha = \frac{1}{2}$ dann ist $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = 1.$

(c) $\nabla h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2x \\ 2+2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (1,-1)$

$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \Rightarrow H_h(1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Deshalb hat $H_h(1,-1)$ die Eigenwerte $-2, 2$ ist also indefinit.
Also ist der einzige kritischer Punkt ein Sattelpunkt und besitzt h keine lokale Extremstellen.

Auf 2 (a) Es gilt $B\vec{x} + \vec{x} = \vec{c} \iff$
$(B+I)\vec{x} = \vec{c}$.
Aus den gegebenen Informationen folgt, dass -1 kein Eigenwert von B ist
$(\det(B-\lambda I) = (4-\lambda)^2(1-\lambda))$,
weshalb $B+I$ invertierbar ist. Also
$(B+I)\vec{x} = \vec{c} \iff \vec{x} = (B+I)^{-1}\vec{c} \quad \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ deshalb hat der Student Recht.

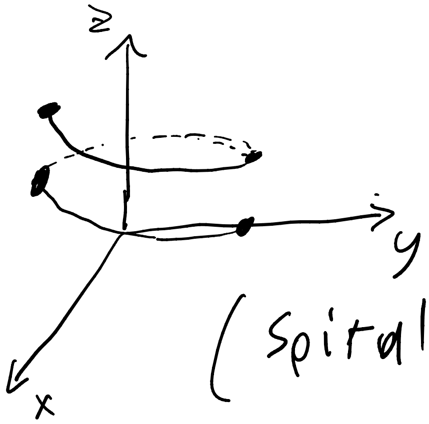
(b) $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2 + 1}$

(b). $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\underbrace{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}_{=1} + 1}$

$\Rightarrow \gamma'(t) = \sqrt{2}.$

Also $\int_\gamma f\,ds = \int_0^{3\pi} f(\sin t, \cos t, t)\|\gamma'(t)\|\,dt$

$= \int_0^{3\pi} t\,\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=3\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} 9\pi^2.$



(Spirale.).

(c)(i) $g(t) = T(\vec{v}(t))$ $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}.$

Also $g'(t) = T'(\vec{v}(t))\,\vec{v}'(t) = T'(\vec{v}(t))\begin{pmatrix} 1 \\ X'(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix}.$

Also $g'(1) = T'(1, X(1), Y(1))\begin{pmatrix} 1 \\ X'(1) \\ Y'(1) \end{pmatrix}.$

$= T'(1,2,3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 2 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 - 4 + 20 = 15.$

Bem: Alternativ kann man schreiben

$g'(t) = T_t(t, X(t), Y(t)) + T_x(t, X(t), Y(t))\,X'(t)$
$\qquad + T_y(t, X(t), Y(t))\,Y'(t)$

und einsetzen Bewegung wird nicht

und einsetzen   Bewegung wird nicht berücksichtigt

$$T_t(1,2,3) = \lim_{h\to 0} \frac{T(1+h,2,3) - T(1,2,3)}{h}$$

Deshalb misst $T_t(1,2,3)$ die Änderungsrate der Temperatur bzg der Zeit in $t=1$ wenn wir im Punkt $\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ stehen.

Im Gegensatz bei   Bewegung wird berücksichtigt.

$$g'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T(1+h, x(1+h), y(1+h)) - T(1, x(1), y(1))}{h}$$

misst die Änderungsrate der Temperatur in $t=1$ im Punkt $\binom{2}{3}$ und die Bewegung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ wird mitberücksichtigt.

Auf 3a)   Sei $\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \\ v \end{pmatrix}$, $(u,v) \in A$

$A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \le 4\}$ ⟶ Kreisscheibe mit Radius 2 um $(0,0)$

Dann gilt für den Flächeninhalt F

$$F = \iint_A \|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\| \, d(u,v).$$

Aber $\vec{g}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{g}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$.   Also

$$\|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & u & 0 \\ 0 & v & 1 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} u \\ -1 \\ v \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + u^2 + v^2}.$$

Also

$$F = \iint_A \sqrt{1+u^2+v^2} \, d(u,v)$$

Polarkoordinaten ...

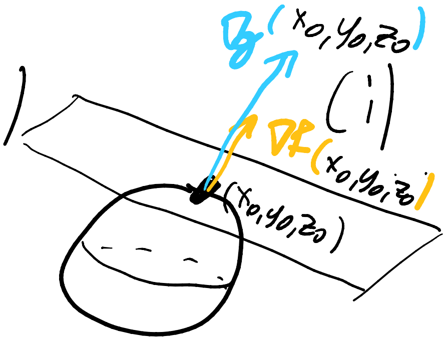
Polarkoordinaten

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+r^2}\; r\,d\varphi\,dr$$

$$= \pi\int_0^2 \underbrace{2r\,\underbrace{\sqrt{1+r^2}}_{u}\,dr}_{du}$$

$$= \pi\int_1^5 u^{\frac{1}{2}}\,du = \pi\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{u=1}^{u=5} = \frac{2}{3}\pi\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

(b)



(i) Wenn die Kugel und die Ebene sich nur in einem Punkt schneiden, schneiden sie sich Tangential. Aber $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ ist senkrecht zu der Ebene E in (x_0,y_0,z_0) da die Ebene eine Niveaufläche von f ist. Ähnlich $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ ist senkrecht zu der Kugel in (x_0,y_0,z_0). Da aber die E und K sich Tangential schneiden müssen $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$, $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ parallel sein.

(ii) Aus (i) $\Rightarrow \nabla g(x_0,y_0,z_0) = \lambda\,\nabla f(x_0,y_0,z_0)$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2(x_0-1) \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 4\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = \lambda+1 \\ y_0 = 2\lambda \\ z_0 = \lambda. \end{array}$$

$\begin{pmatrix} \\ 2z_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ 2\lambda \end{pmatrix} \qquad z_0 = \lambda.$

Da aber $(x_0, y_0, z_0) \in E$ bekommen wir

$$2x_0 + 4y_0 + 2y_0 = 14 \Rightarrow 2\lambda + 2 + 8\lambda + 2\lambda = 14$$
$$\Rightarrow \lambda = 1.$$

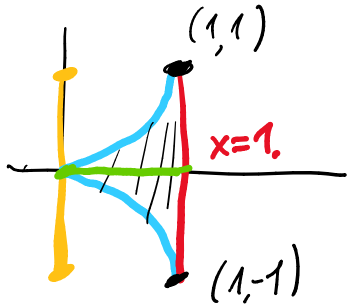
Also $x_0 = 2,\ y_0 = 2,\ z_0 = 1.$

und da $(x_0 - 1)^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6c^2$ bekommen wir

$$1 + 2^2 + 1^2 = 6c^2 \Rightarrow c^2 = 1$$
$$\overset{c>0}{\Rightarrow} c = 1.$$

<u>Auf 4 (a)</u> $-1 \leq y \leq 1$ $\quad \underbrace{|y|^{\frac{1}{3}} \leq x}_{\text{Rechts von}} \underbrace{\leq 1}_{\text{links von der Gerade } x=1.}$

$|y|^{\frac{1}{3}} = x \Leftrightarrow |y| = x^3$ $\begin{cases} \rightarrow y = x^3, \text{ wenn } y \geq 0 \\ \rightarrow y = -x^3, \text{ wenn } y \leq 0. \end{cases}$



Also wird das Integral

$$\int_0^1 \int_{-x^3}^{x^3} 3x^2 e^{x^6}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 6x^5 e^{x^6}\, dx = \int_0^1 \left(e^{x^6}\right)' dx$$

$$= e^{x^6} \Big|_{x=0}^{x=1} = e - 1.$$

(b) $\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\, (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right) =$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} + x\, \frac{3}{2} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} + x \; \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^2 \cdot 2x$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} + 3x^2 (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ähnlich $\dfrac{\partial v_2}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right)$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} + 3y^2 (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

und $\dfrac{\partial v_3}{\partial z} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} + 3z^2 (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}.$

Also wenn wir addieren bekommen wir

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y,z) = 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} + 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

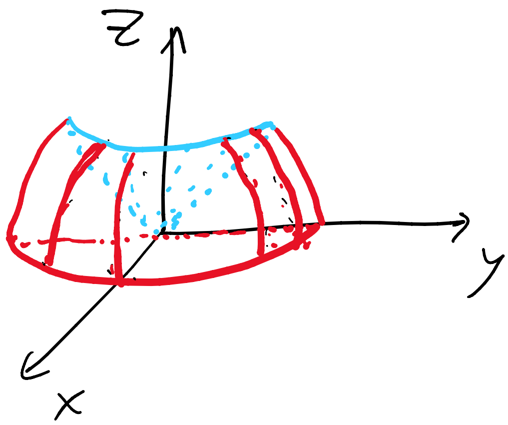
$$= 6(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

(c)(i) $0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$. $\rightsquigarrow$ Unterhalb der Halbkugel $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$. von Radius 2.

$z \le \sqrt{x^2+y^2}$ $\rightsquigarrow$ Unterhalb des Kegels $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

$x^2+y^2 \le 4$ $\rightsquigarrow$ Auf der xy-Ebene Kreis von Radius 2 also Basis der Halbkugel.

$x \ge 0$. $\rightsquigarrow$ Auf der



$x \geq 0$. ⇝ Auf der Seite der positiven x-Achse.

(ii) In Kugelkoordinaten wird A gegeben durch

$$0 \leq r \leq 2, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

da $x \geq 0$

da unterhalb des Kegels.

da $z \geq 0$

Also
$$\iint_{\partial A} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do = \iiint_A \operatorname{div} \vec{v} \, d(x,y,z)$$

$$= \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 6r^3 r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^2 6r^5 \, dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta$$

$$= r^6 \Big|_0^2 \cdot \pi \cdot (-\cos\theta) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 64\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right)$$

$$= \frac{64\pi}{\sqrt{2}}.$$