hm2etitSS2022

Sonntag, 7. August 2022 17:52

Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Sommer 2022
06.08.2022

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 **(4 + 8 + 6 Punkte)**

a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{x^2}{2} + y^2 \end{pmatrix}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.

b) Wir betrachten die Matrix $B = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} & \sqrt[4]{3} \\ \sqrt[4]{3} & \sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v_2} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren der Matrix B sind und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Teils (i) eine **orthogonale** Matrix S, so dass $S^{-1}BS$ diagonal ist. Geben Sie S^{-1} und $S^{-1}BS$ an.

(iii) Untersuchen Sie die Matrix B auf Definitheit.

c) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass die partielle Ableitung $g_x(0,0)$ existiert und berechnen Sie diese.

(ii) Ist die partielle Ableitung g_x stetig in (0,0)? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass für alle $(x,y) \neq (0,0)$ gilt $g_x(x,y) = 2x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Aufgabe 2 **(10 + 8 + 4 Punkte)**

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 - 1 = 0$, die vom Punkt $(1, \sqrt{3})$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben. Geben Sie die Abstände an.

b) Berechnen Sie unter Verwendung von Polarkoordinaten das Integral $\iint_B 3y d(x,y)$, wobei

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x^2+y^2)^{\frac{5}{2}} \leqslant 2x^2 + y^2, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\}.$$

c) Wir betrachten ein differenzierbares Potentialfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Potential f. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Kurve. Zeigen Sie, unter Verwendung der Gleichheit $\vec{v} = \nabla f$, die aus der Vorlesung bekannte Aussage

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(16 + 6 Punkte)**

a) Es sei das Vektorfeld $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Fläche

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass am Rand $\partial\mathcal{F}$ der Fläche $\mathcal{F}$ gilt $x^2 + y^2 = 1$.

(ii) Berechnen Sie, mit Hilfe des Teils (i) und unter Verwendung des Integralsatzes von Stokes das Integral $\iint_{\mathcal{F}} \mathrm{rot}\vec{v}(x,y,z) \cdot \vec{n} do$, wobei $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der nach unten zeigt, also die z Komponente von $\vec{n}$ ist negativ.

(iii) Berechnen Sie das gleiche Integral $\iint_{\mathcal{F}} \mathrm{rot}\vec{v}(x,y,z) \cdot \vec{n} do$ wie im Teil (ii) direkt, also ohne Verwendung des Integralsatzes von Stokes.

b) Wir nehmen an, dass $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist, welche die Temperatur beschreibt als Funktion des Ortes (x,y,z) zu einem festen Zeitpunkt. Die Wärmestromdichte ist ein Vektorfeld, das beschreibt wie die Wärme fließt. Die Wärmestromdichte zu diesem festen Zeitpunkt kann durch das Vektorfeld $\vec{w}(x,y,z) = -\nabla T(x,y,z)$ gegeben werden. Erklären Sie dies anhand der Eigenschaften des Gradienten.

Aufgabe 4 **(8 + 10 Punkte)**

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Seien $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir nehmen an, dass $f(1,2) = 3$. Es gelten für die Richtungsableitungen in $(1,2)$ die Gleichheiten

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}_1}(1,2) = 3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{w}_2}(1,2) = 1.$$

Bestimmen Sie das erste Taylorpolynom (also von Grad 1) von f in $(1,2)$ und approximieren Sie damit den Wert $f(1.2, 1.9)$.

b) Sei

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in A, \quad \sqrt{3(x^2+y^2)} \leqslant z \leqslant \sqrt{3}\},$$

wobei

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geqslant 0, \quad y \geqslant -x, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

(i) Skizzieren Sie die Menge A in $\mathbb{R}^2$ und danach die Menge B in $\mathbb{R}^3$. Begründen Sie Ihre Skizzen.

(ii) Geben Sie B in Kugelkoordinaten an. Begründen Sie Ihre Wahl der Grenzen für die Kugelkoordinaten (θ, φ, r).

Viel Erfolg!

a) $\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} \xrightarrow[\text{zusammenhängend}]{\mathbb{R}^2 \text{ einfach}} \vec{v}$ ist Potentialfeld

$\nabla f \overset{!}{=} \vec{v}$ Also $f_x \overset{!}{=} xy \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{2} y + c(y)$.

Aber dann $f_y(x,y) = \frac{x^2}{2} + c'(y) \overset{!}{=} \frac{x^2}{2} + y^2$

$\Rightarrow c'(y) = y^2$. Also ist $c(y) = \frac{y^3}{3}$ eine mögliche Wahl. Also ist $f(x,y) = \frac{x^2}{2} y + \frac{y^3}{3}$ ein zugehöriges Potential

(b)(i) $\begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} & \sqrt[4]{3} \\ \sqrt[4]{3} & \sqrt[4]{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} \\ \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} \end{pmatrix} = (\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum EW $(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})$.

$\begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} & \sqrt[4]{3} \\ \sqrt[4]{3} & \sqrt[4]{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3} \\ \sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{2} \end{pmatrix} = (\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum EW $\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3}$.

(ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal (da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$) und eine Basis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren der Matrix. Also bilden

$\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$ aus

Eigenvektoren von B. Also ist $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ eine mögliche Wahl

$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad S^{-1} B S = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} & 0 \\ 0 & \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3} \end{pmatrix}$

(iii) Da $\lambda_1 = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} > 0$ und $\lambda_2 = \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3} < 0$

(iii) Da $\lambda_1 = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} > 0$ und $\lambda_2 = \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3} < 0$
ist B indefinit

Alternativ: $\det B = (\sqrt[4]{2})^2 - (\sqrt[4]{3})^2 = \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$
also ist B indefinit.

(c) (i) $g_x(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{|x|}\right) - 0}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\in[-1,1]\text{ (also beschränkt)}} = 0.$

(ii) Für $x > 0$ gilt nach Hinweis

$g_x(x,0) = \underbrace{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} + \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\not\to 0}. \not\to 0 = g_x(0,0)$

wenn $x \to 0$ wie oben gezeigt

weil z.B $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$ aber $\sin(x_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Also ist g_x nicht stetig in $(0,0)$.

2a) Sei $f(x,y) = \|(x,y) - (1,\sqrt{3})\|^2 = (x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2.$
und $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

wir werden das Minimum und Maximum davon unter der Bedingung $h(x,y) = 0$ finden und am Ende die Wurzel davon nehmen.

Da $\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wenn $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

wollen wir $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y) \iff \begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \end{cases}$

wollen wir $\nabla f(x,y)=\lambda \nabla h(x,y) \iff \begin{cases} 2(x-1)=2\lambda x \\ 2(y-\sqrt{3})=2\lambda y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x-1=\lambda x \\ y-\sqrt{3}=\lambda y \end{cases} \iff \left.\begin{matrix} x(1-\lambda)=1 \\ y(1-\lambda)=\sqrt{3} \end{matrix}\right\} \xRightarrow[y\neq 0]{1-\lambda\neq 0} \frac{x}{y}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

weil rechte Seiten $\neq 0$

$\Rightarrow y=\sqrt{3}x.$

Aber $x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2+3x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow$
$x=\pm\frac{1}{2}$ Also $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ oder $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Aber $f\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$

$f\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{27}{4}=9.$

Also kleinster Abstand 1 wenn $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

größter Abstand $\sqrt{9}=3$ wenn $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) $(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}} \leq 2x^2+y^2 \Longrightarrow (r^2)^{\frac{5}{2}} \leq r^2(2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$

$\Rightarrow r^3 \leq 1+\cos^2\varphi.$

Aber $x\geq 0, y\geq 0 \Rightarrow \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Also

$B=\left\{(r,\varphi): 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq r\leq\sqrt[3]{1+\cos^2\varphi}\right\}$. Determinante

Also $\iint_B 3y\, d(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt[3]{1+\cos^2\varphi}} 3r\sin\varphi\, r\, dr\, d\varphi$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\Big|_{r=0}^{r=\sqrt[3]{1+\cos^2\varphi}} \sin\varphi\, d\varphi.$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2\varphi)\sin\varphi\, d\varphi \xlongequal[du=-\sin\varphi d\varphi]{u=\cos\varphi} \int_1^0 (1+u^2)(-du)$

$$= \int_0 (1+\underbrace{\cos\varphi}_{u^2}) \underbrace{\sin\varphi\, d\varphi}_{-du} \;\underset{\substack{\varphi=0 \rightsquigarrow u=1 \\ \varphi=\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow u=0}}{\overset{du=-\sin\varphi\, d\varphi}{=\!=\!=}}\; \int_1 (1+u^2)(-du)$$

$$= \int_0^1 (1+u^2)\,du = u + \frac{u^3}{3}\Big|_{u=0}^{u=1} = \frac{4}{3}.$$

(c) $$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma \nabla f \cdot d\vec{s} = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{f'(\gamma(t))\, \gamma'(t)}_{\text{Matrixprodukt}}\,dt \;\overset{\text{Kettenregel}}{=\!=\!=}\; \int_a^b \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))\,dt$$

$$\overset{\substack{\text{Hauptsatz} \\ \text{der Differential-}}}{=\!=\!=} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

und Integralrechnung.

3a (i). Am Rand $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z + z^2 = 2 \end{cases}$

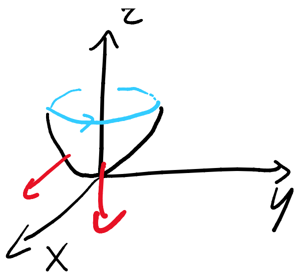
Aber $z^2+z=2 \Leftrightarrow z^2+z-2=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+2)=0.$

Also am Rand $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 1 \text{ oder } z=-2 \end{cases} \underset{\text{unmöglich}}{\overset{x^2+y^2=-2}{\Longrightarrow}} x^2+y^2=1.$

(ii) Aus Teil (i) $x^2+y^2=1$ und da auf F $z = x^2+y^2$ $\Big\}$ $\overset{\text{auf } \partial F}{\Longrightarrow}$ $\begin{matrix} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{matrix}$

Also ist $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$, $t\in[0,2\pi]$ eine Parametrisierung des Randes. Also nach Stokes

$$\iint \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{n}\; d(x,y) = \int_{\partial F} \vec{v}\cdot d\vec{s}$$



$$\iint_F \operatorname{rot}\vec v\cdot\vec n\, d(x,y) = \int_{\partial F} \vec v\cdot d\vec s$$

$$= -\int_0^{2\pi} \vec v(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt.$$

weil die Orientierung von γ die falsche ist da $\vec n$ nach unten zeigt.

$$= -\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} = -\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt = -\int_0^{2\pi}1\,dt=-2\pi$$

(iii) $$\operatorname{rot}\vec v = \begin{vmatrix}\vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ -y & x & z\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y z-\partial_z x\\ -\partial_x z-\partial_z y\\ \partial_x x+\partial_y y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}.$$

und da $F=\{\vec g(x,y) : x^2+y^2\leq 1\}$ mit

Am Rand gilt die Gleichheit.

$\vec g(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\\x^2+y^2\end{pmatrix}$ bekommen wir.

$$\vec g_x\times\vec g_y = \begin{pmatrix}1\\0\\2x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2y\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3\\ 1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 2y\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-2x\\-2y\\1\end{pmatrix}.$$

Da $1>0$ nehmen wir den Vektor

$$-\vec g_x\times g_y=\begin{pmatrix}2x\\2y\\-1\end{pmatrix}$$

Also $$\iint_{\partial F}\operatorname{rot}\vec v\,d(x,y) = \iint_{x^2+y^2\leq 1}\begin{pmatrix}2x\\2y\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}d(x,y) = -2\iint_{x^2+y^2\leq 1}d(x,y)$$

$$= -2\underbrace{\pi\cdot 1^2}_{\text{Flächeninhalt der Kreisscheibe}} = -2\pi.$$

(c) $-\nabla T$ zeigt in der Richtung des stärksten Abfalls der Temperatur

(c)

$-\nabla T$ → des stärksten Abfalls der Temperatur

$-\nabla T$ → hat länge gleich wie die Steigung des stärksten Abfalls.

Die Wärme fließt von heiß nach Kalt und je steiler sich die Temperatur ändert, desto schneller fließt die Wärme. Das ist Konsistent mit den obengenannten Eigenschaften des Gradienten.

(4a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}_1}(1,2)=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} f_x(1,2) \\ f_y(1,2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow f_x(1,2)+f_y(1,2)=3$ (1)

$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}_2}(1,2)=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} f_x(1,2) \\ f_y(1,2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow f_x(1,2)-f_y(1,2)=1$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ $2f_x(1,2)=4 \Rightarrow f_x(1,2)=2.$

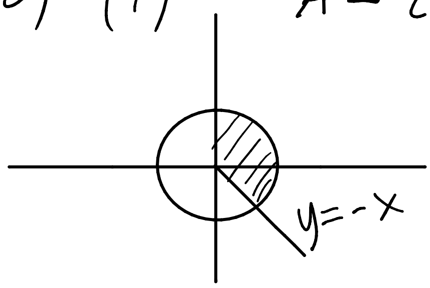
und wegen (1) $f_y(1,2)=3-f_x(1,2)=3-2=1$

Also lautet das Polynom

$f(1,2)+(x-1)f_x(1,2)+(y-2)f_y(1,2)=3+2(x-1)+y-2.$

Deshalb $f(1.2,1.9) \approx 3+2(1.2-1)+(1.9-2)=3{,}3$

(6) (i) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq -x,\ x^2+y^2\leq 1\}.$



$x\geq 0$: rechts von der y Achse

$y\geq -x$: über $y=-x$.

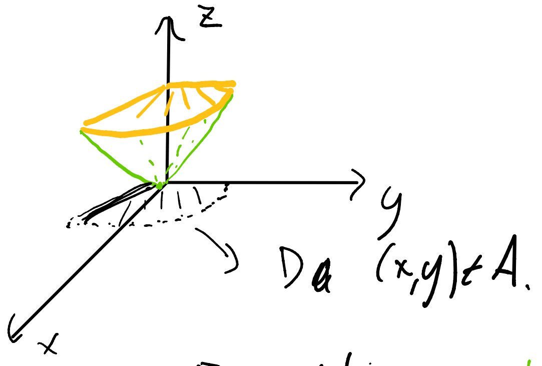
$x^2+y^2\leq 1$: innerhalb des Kreises $x^2+y^2=1$

Für B $(x,y)\in A$ $\sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{3}$

Für B $(x,y)\in A$ $\sqrt{3(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{3}$

über den Kegel $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$

unter der Ebene $z=\sqrt{3}$



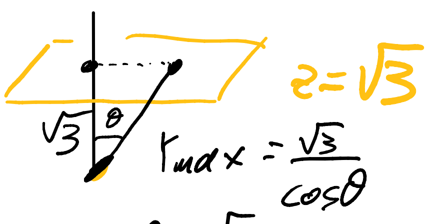
Bemerkung: Kegel und Ebene schneiden wenn $\left.\begin{array}{l} z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \\ z=\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=1.$

(ii) Aus $x\ge 0$, $y\ge -x$ folgt $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. (siehe auch Skizze von A).

Da $z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)} \overset{z\ge 0}{\Longrightarrow} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\le\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta\le\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\overset{\theta<\frac{\pi}{2}}{\underset{\text{da } z\ge 0}{\Longrightarrow}} \tan\theta\le\tan\frac{\pi}{6} \xRightarrow[\text{wachsend}]{\tan\text{ monoton}} 0\le\theta\le\frac{\pi}{6}.$

Zum Schluss aus $z\le\sqrt{3}$ folgt $r\cos\theta\le\sqrt{3}$. Also $r\le\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$.



da $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{r_{max}}$

Also $0\le r\le\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$

Das kann man auch geometrisch mit der linken Skizze sehen.