

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 8 + 12 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v}(x, y) := \begin{pmatrix} x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.

b) Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $g(x, y, z) := x + y + z$ auf

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 \leq 4\}.$$

c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (1, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(1, 0)$ stetig ist.

ii) Sei $\vec{v} := \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, wobei $\theta \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass für alle $\theta \in [0, 2\pi)$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 0)$ existiert und bestimmen Sie diese.

iii) Ist f differenzierbar im Punkt $(1, 0)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (6 + 6 + 4 Punkte)

a) Das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, \sqrt{20})\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei stetig differenzierbar und erfülle die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$. Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Der Student 1 behauptet, dass die gegebenen Informationen implizieren, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist und deshalb ist $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$. Der Student 2 behauptet, dass es nicht klar ist, ob $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, deshalb ist es nicht klar, ob $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$. Argumentieren Sie, für jeden der beiden Studenten, ob er richtig argumentiert.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symmetrisch mit $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(a - \lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, wobei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Eigenräume von A in Abhängigkeit von a .

c) Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie anhand der Definition der positiven Definitheit (insbesondere ohne Berechnung von Eigenwerten und ohne das Hurwitzkriterium), dass B positiv definit ist.

Aufgabe 3 (2 + 4 + 8 + 6 Punkte)

Wir betrachten die Fläche $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - y + x^2, z + y \leq 1\}$ und das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ ye^z \end{pmatrix}$.

- a) Zeigen Sie, dass am Rand ∂S von S gilt $x^2 + y^2 = 1$.
- b) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Stokes und mithilfe des Teils a), dass

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma},$$

wobei $\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z + y = 1\}$. Für jede der zwei Flächen zeigt der Normaleneinheitsvektor nach oben, d.h. die z -Komponente ist positiv.

- c) Berechnen Sie mithilfe des Teils b) das Oberflächenintegral $\iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$.
- d) Wir betrachten das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) := \begin{cases} xy & \text{wenn beide } x, y \text{ positiv sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_{\partial S} f \, ds$, durch Parametrisierung des Randes ∂S von S als einfach geschlossene Kurve.

Aufgabe 4 (8 + 12 Punkte)

- a) Wir betrachten das Integral

$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} \cos(2y - e^y + 1) \, dy \, dx.$$

Skizzieren Sie das Integrationsgebiet. Bestimmen Sie dann den Wert des Integrals, indem Sie die Integrationsreihenfolge vertauschen.

- b) Wir betrachten den Bereich

$$B := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, 0 \leq z \leq \min \left(1, 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right\}$$

und das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} z \\ xy \\ y + x \end{pmatrix}.$$

- i) Erstellen Sie eine Skizze des Bereichs B . In Ihrer Skizze sollen die x -, y - und z -Achsen auftauchen.
- ii) Bestimmen Sie mithilfe des Divergenzsatzes und durch Übergang zu Zylinderkoordinaten den Fluss von $\vec{v}$ durch den Rand ∂B von B .

Viel Erfolg!

1a) $\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (-x+2y) = -1$ $\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$
 $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x-y) = -1$ $\left. \begin{array}{l} \text{B}^2 \text{ einfach} \\ \text{zusammen} \\ \text{hängend} \end{array} \right\} \vec{v} \text{ ist Potentialfeld.}$

$\nabla \phi \stackrel{!}{=} \vec{v} \quad \leadsto \quad \phi_x = x-y \Rightarrow \phi = \frac{x^2}{2} - xy + c(y)$

Dann $\phi_y = -x + c'(y) \stackrel{!}{=} -x + 2y \Rightarrow c'(y) = 2y.$

Also ist $c(y) = y^2$ eine mögliche Wahl und $\phi(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + y^2$ ein zugehöriges Potential.

(1b) Sei $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 4$. Dann

$\partial S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) = 0\}.$

Da $\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1), wird das Min/Max von g auf Rand ∂S von S angenommen.
 Da $\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ z \end{pmatrix}$ (2), folgt dass

$\nabla h(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

und da $h(0,0,0) = -4 \neq 0$ folgt, dass $(0,0,0) \notin \partial S$
 also $\nabla h(x,y,z) \neq \vec{0}$ auf S , deshalb ist die Multiplikatorregel von Lagrange verwendbar.

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla g = \lambda \nabla h \\ h=0 \end{array} \right. \xRightarrow{(1),(2)} \left\{ \begin{array}{l} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = \lambda z \\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 4 \end{array} \right. \xRightarrow{\lambda \neq 0, \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda}} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{1}{\lambda} \\ \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} = 4 \end{array} \right. \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{1}{\lambda} \\ \lambda = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (1, 1, 2)$$

$$\text{oder } (x, y, z) = (-1, -1, -2)$$

$$\text{Da } g(1, 1, 2) = 4, \quad g(-1, -1, -2) = -4.$$

$$\text{Ist } \max g = 4, \quad \min g = -4.$$

$$(1c) \quad (i) \quad \left| \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2 + y^2} \right| = |x-1| \underbrace{\frac{y^2}{(x-1)^2 + y^2}}_{\in [0, 1]} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (1,0)} 0$$

$$\text{da } 0 \leq y^2 \leq (x-1)^2 + y^2$$

$$\text{Also } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = 0 = f(1,0). \text{ Also ist } f \text{ stetig in } (1,0).$$

$$(ii) \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h\cos\theta, h\sin\theta) - f(1,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\cos\theta (h\sin\theta)^2}{(h\cos\theta)^2 + (h\sin\theta)^2} - 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cos\theta \sin^2\theta}{h^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta)} =$$

$$\xrightarrow{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cos\theta \sin^2\theta}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\theta \sin^2\theta = \cos\theta \sin^2\theta.$$

$$\text{Also existiert } \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) \text{ und ist gleich } \cos\theta \sin^2\theta$$

$$(iii) \quad f_x(1,0) = \frac{\partial f}{\partial (1)}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial (\cos\theta)}(1,0) \stackrel{(ii)}{=} \cos\theta \sin^2\theta = 0$$

$$f_y(1,0) = \frac{\partial f}{\partial (0)}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial (\sin\theta)}(1,0) \stackrel{(ii)}{=} \cos\frac{\pi}{2} \sin^2\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{Also } \frac{f(x,y) - f(1,0) - (f_x(1,0) \ f_y(1,0)) \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}}{\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \|} = \frac{\frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} - 0 - 0}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \frac{(x-1)y^2}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow[\substack{\text{wenn} \\ (x,y) \rightarrow (1,0)}}{0}$$

da $(1+\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (1,0)$ und

$$\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\left(\frac{2}{n^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{3/2}} \rightarrow 0$$

Also ist f nicht differenzierbar in $(1,0)$

(2a) $\mathbb{B}^2 \setminus \{(0, \sqrt{2})\}$ ist nicht einfach zusammenhängend (da z.B. der Einheitskreis um $(0, \sqrt{2})$ zu keinem Punkt zusammengezogen werden kann ohne $\mathbb{B}^2 \setminus \{(0, \sqrt{2})\}$ zu verlassen, deshalb ist es nicht klar, ob $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist.

Dennoch γ ist einfach geschlossen und positiv orientiert und $(0, \sqrt{2})$ ist außerhalb von γ , also ist der Satz von Gauß-Green verwendbar.

Deshalb $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \underbrace{\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)}_{=0} d(x,y) = 0.$

Insofern argumentierten beide Studenten falsch.

(28) Da $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ erkennen wir, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_A(2)$. (3)

Ist $a \neq 2$ dann hat A zwei Eigenräume mit algebraischer Vielfachheit 1 und deshalb mit geometrischer Vielfachheit 1.

Da A symmetrisch sind $E_A(2)$ und $E_A(a)$ orthogonal. Aber $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$

$\Rightarrow b = -2a \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Deshalb bekommen

wir (auch mithilfe von (3)), $E_A(2) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $E_A(a) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Ist $a = 2$ dann $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^2$ also hat der EW 2 algebraische Vielfachheit 2.

Da aber A symmetrisch, ist A diagonalisierbar also hat der EW 2 geometrische Vielfachheit gleich ebenso 2.

Also $\dim E_A(2) = 2 \xrightarrow[\text{von } \mathbb{R}^2]{E_A(2) \text{ aufspannt}} E_A(2) = \mathbb{R}^2$.

In diesem Fall hat A keine anderen Eigenräume.

$$(2c) \quad \vec{x}^T B \vec{x} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(x_1 + x_2) + x_2(x_1 + 3x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 \Rightarrow$$

$$\vec{x}^T B \vec{x} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2^2 = \underbrace{(x_1 + x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2^2}_{\geq 0} \geq 0$$

mit Gleichheit

da beide Summanden ≥ 0 sind

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist B positiv definit.

$$(3a) \quad (x, y, z) \in \partial S \Leftrightarrow \begin{cases} z + y = 1 \\ z = y^2 - y + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + y = 1 \\ z + y = y^2 + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (4) \quad \text{insbesondere gilt auf } \partial S \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3b) \quad \partial F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z + y = 1\} \stackrel{(4)}{=} \partial S \quad (5)$$

Nach Stokes gilt $\iint_{\partial F} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{o} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (6)$

und $\iint_F \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{o} = \int_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (7)$

Da $\partial F = \partial S$ und beide Normaleneinheitsvektoren nach oben zeigen ist die Orientierung der Integrale $\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s}$, $\int_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s}$

gleich nach der Regel der rechten Hand, also ist

$$\int_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} \stackrel{(6), (6)}{=} \iint_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o}$$

(3c) $\iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o} \stackrel{(6)}{=} \iint_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o} \stackrel{(7)}{=} \text{Nun}$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(ye^z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^3) \\ \frac{\partial}{\partial z}(-y^3) - \frac{\partial}{\partial x}(ye^z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(-y^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^z \\ 0 \\ 3(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \stackrel{(8)}{\text{Außer dem}}$$

$$F = \{ \vec{g}(x, y) : (x, y) \in U \}, \text{ wobei } \vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}. \text{ Da } \vec{g}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{g}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

bekommen wir $\vec{g}_x \times \vec{g}_y = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Also

$$\iint_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \iint_U \underbrace{\begin{pmatrix} e^{1-y} \\ 0 \\ 3(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{wegen (8) und da } z=1-y \text{ auf } F} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d(x, y) = \iint_U 3(x^2 + y^2) d(x, y)$$

Polarkoordinaten $\int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^2 \cdot \underbrace{1}_{\text{Determinante}} d\varphi dr = 6\pi \int_0^1 r^3 dr = 6\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$

(3d) Auf $\partial S = \partial F$ gilt $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 - y \end{cases}$ also ist $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 - \sin t \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung von ∂S

Also $\int_{\gamma} f ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$

aber $\|\gamma'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sin^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{1 + \cos^2 t}$

und $f(\gamma(t)) = \begin{cases} \cos t \cdot \sin t, & t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

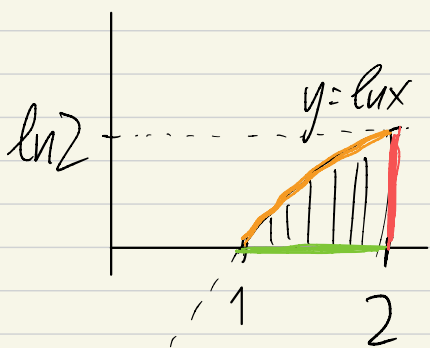
$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos t \sin t}_{u} \underbrace{\sqrt{1 + \cos^2 t}}_u dt = -\frac{du}{2}$

$du = -2 \cos t \sin t dt$

$t=0 \Rightarrow u=2, \quad t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1$ also

$\int_{\gamma} f ds = \int_2^1 -\frac{du}{2} \sqrt{u} = \int_1^2 \frac{\sqrt{u}}{2} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot 2} \Big|_1^2 = \frac{2^{\frac{3}{2}} - 1}{3}$

4a)



Da $1 \leq x \leq 2$ und

$0 \leq y \leq \ln x$

ist das Integrationsgebiet links dargestellt. Der höchste Wert von y ist $\ln 2$.

Da $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

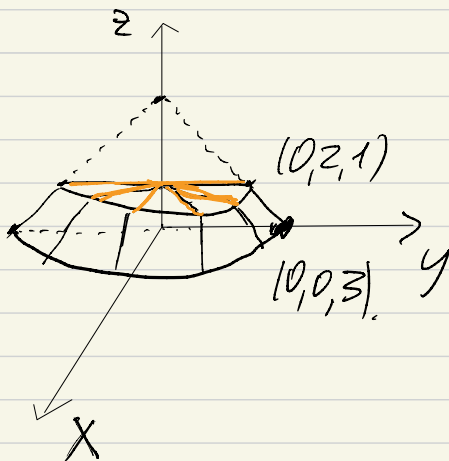
ist das Integral gleich.

$$\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 \cos(zy - e^y + 1) dx dy = \int_0^{\ln 2} (2 - e^y) \cos(zy - e^y + 1) dy.$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{du} &= \frac{2y - e^y + 1}{(2 - e^y) dy} \\ u &= 2y - e^y + 1 \\ y=0 &\leadsto u=0 \\ y=\ln 2 &\leadsto u=2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\ln 2 - 1} \cos(u) du = \sin(u) \Big|_{u=0}^{u=2\ln 2 - 1} = \frac{\sin(2\ln 2 - 1)}{\sin 0}$$

4b)



(i) $x \geq 0 \leadsto$ auf einer Seite der yz -Ebene

$z \leq 1 \leadsto$ unter der Ebene $z=1$.

$z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \leadsto$ unter dem Kegel
 $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

$z \geq 0$ über der xy -Ebene.

$$(ii) \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(y+x) = 0 + x + 0 = x.$$

Also

$$\int_{dB} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_B x d(x,y,z).$$

$$= \int_0^1 \int_0^{3-z} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi \cdot r d\varphi dr dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{3-z} r^2 dr \left(\sin \varphi \Big|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \right) dz = 2 \int_0^1 \int_0^{3-z} r^2 dr dz$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^{3-z} \right) dz = 2 \int_0^1 \frac{(3-z)^3}{3} dz = -\frac{2}{3 \cdot 4} (3-z)^4 \Big|_{z=0}^{z=1} = \frac{3^4 - 2^4}{6}.$$

Beweis: $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kommt aus $x \geq 0$. Da

$z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2} = 3 - r$ kriegen wir auch $r \leq 3 - z$.