Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
PD Dr. I. Anapolitanos
Dr. Michael Hofacker

Sommer 2024
03.08.2024

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 **(4 + 7 + 5 + 6 Punkte)**

a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v}(x,y) := \begin{pmatrix} xy \\ \frac{x^2}{2} + y \end{pmatrix}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.

b) Wir betrachten das Integral

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{x} \exp(y^4)\, dy\, dx\,.$$

Skizzieren Sie das Integrationsgebiet. Bestimmen Sie den Wert des Integrals, indem Sie die Integrationsreihenfolge vertauschen.

c) Wir betrachten den Punkt $M \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten $(-1, \sqrt{3}, -2\sqrt{3})$. Bestimmen Sie die Kugelkoordinaten von M.

d) Wir betrachten eine Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Wir schreiben $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$, und $F(z) = F(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, wobei $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls der Grenzwert

$$F'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{F(z) - F(0)}{z}$$

existiert, dann ist $u_x(0,0) = v_y(0,0)$.

Aufgabe 2 **(8 + 9 Punkte)**

a) Wir betrachten die Menge

$$M := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = \frac{9}{4} \right\}.$$

Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Ebene $E_t := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = t\}$ die Menge M in **genau einem Punkt** schneidet. Geben Sie für jedes dieser $t \in \mathbb{R}$ den entsprechenden Schnittpunkt an. **Verwenden Sie eine Eigenschaft des Gradienten** um die Aufgabe zu lösen.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ **symmetrisch** mit $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - \sqrt{2})^2$ und $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine **orthogonale** Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist. Begründen Sie dabei, warum die gegebenen Informationen ausreichen um S zu bestimmen. Geben Sie $S^{-1}AS$ an.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(4 + (11 + 8) Punkte)**

a) Untersuchen Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y) := \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2 y^3}{(x+1)^4 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (-1, 0)\,, \\ 0 & \text{für } (x, y) = (-1, 0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit in $(-1, 0)$.

b) Wir betrachten die Fläche

$$\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = x^2 + y^2 + 1, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x \leqslant 0\ \}$$

und das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} 0 \\ z - 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

(i) Erstellen Sie eine Skizze <u>**des Randes**</u> $\partial\mathcal{F}$ der Fläche. In der Skizze sollen die x-, y- und z- Achsen auftauchen. Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt, also ohne Verwendung des Satzes von Stokes. Die Orientierung des Randes können Sie aussuchen.

(ii) Berechnen Sie $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Satzes von Stokes indem Sie das entsprechende Oberflächenintegral bestimmen.

Aufgabe 4 **(8 + 10 Punkte)**

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und seien $\vec{v} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir nehmen an, dass in $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)$ gilt $f(\vec{x}_0) = 2$ und dass für die Richtungsableitungen die Gleichheiten

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(\vec{x}_0) = 3$$

gelten. Genügen die gegebenen Informationen, um die Funktionswerte $f(1, 1, 2)$ und $f(2, 3, 2)$ durch das erste Taylorpolynom um $\vec{x}_0$ zu approximieren? Begründen Sie Ihre Antwort für jeden der beiden Funktionswerte und approximieren Sie ihn gegebenenfalls.

b) **(i)** Erstellen Sie eine Skizze der Fläche $z = y^2 - x^2$, so dass die x-, y- und z-Achsen auftauchen. **Gehen Sie dazu wie folgt vor**: Zeichnen Sie in $\mathbb{R}^3$ den Schnitt der Fläche mit den Ebenen $x = 0$, $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ und $y = 2$. Es ist <u>**nicht nötig**</u> die Ebenen zu skizzieren oder Koordinaten von Punkten anzugeben.

(ii) Sei B der beschränkte Bereich, der von den Ebenen $z = 0$, $y = 1$, $y = 2$ und von der Fläche $z = y^2 - x^2$ eingeschlossen wird. Wir betrachten außerdem das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Divergenzsatzes bestimmen Sie den Fluss von $\vec{w}$ durch ∂B, genauer das Integral $\iint_{\partial B} \vec{w} \cdot \vec{n}\, do$, wobei $\vec{n}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor an den Rand ∂B von B bezeichne.

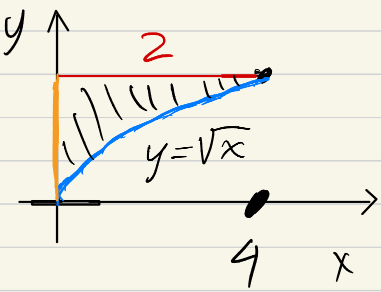
Viel Erfolg!

(1a) $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial (xy)}{\partial y} \overset{!}{=} x.$
$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2}{2}+y\right] = x$ $\Bigg\} \Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} \xRightarrow[\text{zusammenhängend}]{\mathbb{R}^2 \text{ einfach}}$ $\vec{v}$ ist Potentialfeld.

$\nabla f \overset{!}{=} \vec{v}$. Also $f_x = xy \Rightarrow f = \frac{x^2}{2}y + c(y)$.

Also $f_y = \frac{x^2}{2} + c'(y) = \frac{x^2}{2} + y \Rightarrow c'(y) = y$

$\Rightarrow c(y) = \frac{y^2}{2}$ mögliche Wahl, also $f(x,y) = \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2}$ ist ein mögliches Potential.

(1b) 

Da $\sqrt{x} \le y \le 2$ und $y=\sqrt{x}$, $y=2$ sich für $x=4$ (obere Grenze für x) schneiden ist das Integrationsgebiet wie links.

Aber $y = \sqrt{x} \xRightarrow{x\ge 0} x = y^2$. Ferner ist $0 \le y \le 2$ und $0 \le x \le y^2$. Also.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{x}\, e^{y^4}\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \sqrt{x}\, e^{y^4}\, dx\, dy.$$

$$= \int_0^2 e^{y^4} \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{y^2} \right) dy = \int_0^2 \frac{2}{3} e^{y^4} y^3\, dy.$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^2 \underbrace{4y^3 e^{y^4}}_{(e^{y^4})'} dy = \frac{1}{6} e^{y^4}\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\left(e^{16}-1\right).$$

(1c) $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3+12} = \sqrt{16} = 4.$

$\cos\theta = \frac{z}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\theta\in[0,\pi]} \theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$

$\tan\varphi = \frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{1} \underset{\text{da } (-1,\sqrt{3})}{\Longrightarrow} \varphi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$

zweiten Quadrant der xy-Ebene

(1d) $z = x+iy.$ Pfad $z = x \quad x\to 0$

$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} + i\,\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x}$

Also $F'(0) = u_x(0,0) + i v_x(0,0) \quad (1)$

Pfad $z = iy, \quad y \to 0.$

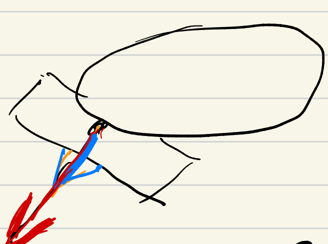
$F'(0) = \lim_{y\to 0} \frac{F(iy)-F(0)}{iy} =$

$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{u(0,y)-u(0,0)}{iy} + \frac{i(v(0,y)-v(0,0))}{iy}\right).$

$\Longrightarrow \quad F'(0) = \frac{u_y(0,0)}{i} + v_y(0,0) \quad (2)$

Wenn wir in (1), (2) Realteil nehmen bekommen wir $u_x(0,0) = v_y(0,0)$

(2a)



M, E_t sind Niveaumenge der Funktionen $f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = \frac{9}{4}.$

$g(x,y,z)$

$$\nabla\left[x^2+\frac{y^2}{2}+z^2\right]=\begin{pmatrix}2x\\y\\2z\end{pmatrix}\perp M \text{ in } (x,y,z)\in M \text{ und}$$

$$\nabla(2x+y+z)=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\perp E_t \text{ in } (x,y) \text{ sind}$$

$$\begin{pmatrix}2x\\y\\2z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \text{ parallel} \xRightarrow[\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix}2x\\y\\2z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\frac{\lambda}{2}\end{cases} \quad (3)$$

Aber $x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=\frac{9}{4} \Rightarrow \lambda^2+\frac{\lambda^2}{2}+\lambda^2=\frac{9}{4} \Rightarrow \lambda^2=\frac{9}{7}$

Also $\lambda=\pm\frac{3}{\sqrt{7}} \xRightarrow[(3)]{}$

$(x,y,z)=\frac{3}{\sqrt{7}}(1,1,\frac{1}{2})$ oder $(x,y,z)=-\frac{\sqrt{3}}{7}(1,1,\frac{1}{2})$.

In diesem Fall $\qquad$ in diesem Fall

$t=2x+y+z=\frac{3}{\sqrt{7}}(3+\frac{1}{2})=\frac{7}{2}\frac{3}{\sqrt{7}}$ $\qquad$ $t=-\frac{7}{2}\frac{3}{\sqrt{7}}$.

(b) $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ EV zum EW 0.

$\lambda=\sqrt{2}$ hat algebraische Vielfachheit 2

$\xRightarrow[\text{also diagonalisierbar}]{A \text{ symmetrisch}}$ $\lambda=\sqrt{2}$ hat geometrische Vielfachheit 2, auch 2 also $\dim E_A(\sqrt{2})=2$. (4)

Außerdem da A symmetrisch sind EV zu verschiedenen Eigenräumen orthogonal.

Also $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\perp E_A(\sqrt{2})$ (5)

(4),(5) $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_A(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow x=y$

Also $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|=1]{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine ONB von $E_A(\sqrt{2})$. $\Longrightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ONB von $E_A(0)$

$\underline{E_A(0) \perp E_A(\sqrt{2})}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ONB von $\mathbb{R}^3$ aus EW von A.

Also $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(3a) $\frac{(x+1)^2|y|^3}{(x+1)^4+y^4} = \underbrace{\frac{(x+1)^2}{\sqrt{(x+1)^4+y^4}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{y^2}{\sqrt{(x+1)^4+y^4}}}_{\leq 1} \underbrace{|y|}_{\to 0} \to 0.$

da $0 \leq (x+1)^2 \leq \sqrt{(x+1)^4+y^4}$ da $0 \leq y^2 \leq \sqrt{(x+1)^4+y^4}$.

Also $\lim_{(x,y)\to(-1,0)} g(x,y) = 0 = g(-1,0)$ also ist g stetig in $(-1,0)$.

(3b) (i) Der Rand besteht aus 2 Teilen.

Teil 1 $x=0$, $x^2+y^2 \leq 1$, $z = x^2+y^2+1$

$\Rightarrow$ $x=0$, $y^2 \leq 1$, $z = y^2+1$.

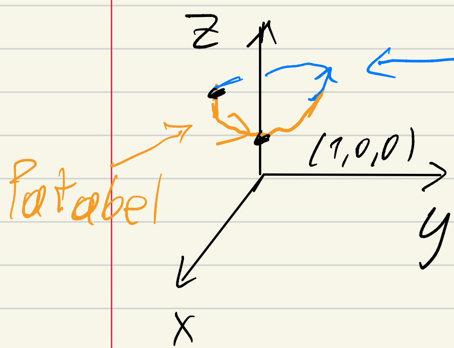
$\Updownarrow$

$-1 \leq y \leq 1$.

Also $\gamma_1(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y^2+1 \end{pmatrix}$, $y \in [-1,1]$. $\rightsquigarrow$ Parabel auf der yz-Ebene.

Teil 2: $x \le 0$, $x^2+y^2=1$, $z = \underbrace{x^2+y^2}_{=1}+1 = 2$

Also $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ da $x \le 0$.



Halbkreis auf der Ebene $z=2$.

Also $\int_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

$$\int_{-1}^{1} \vec{v}(\gamma_1(y)) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y^2+1 \end{pmatrix} dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \vec{v}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-1}^{1} y^2\, dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t\, dt = \frac{y^3}{3}\Big|_{y=-1}^{y=1} + \sin t \Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

(In der Skizze kann man die Orientierung sehen).

(3b2). $\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & z-1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $F = \{\vec{g}(x,y) : (x,y) \in A\}$

wobei $\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2+1 \end{pmatrix}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \leq 0\}$.

Also $\vec{g_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$, $\vec{g_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}$. und

$$\vec{g_x} \times \vec{g_y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also $\iint_F \operatorname{rot} \vec{v} = \iint_A (\vec{g_x} \times \vec{g_y}) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} d(x,y)$

$$= \iint_A 2(x+y)\, d(x,y) \xrightarrow[|\det \phi'|]{\text{Polarkoordinaten}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^1 2(r\cos\varphi + r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi =$$

da $x \leq 0$.

$$= \int_0^1 2r^2 dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{2r^3}{3}\Big|_0^1 + (\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

(4a) Da f dbar gilt $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{u}$ (8) $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$.
Die Approximation von $f(\vec{s})$, $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$ lautet

$$f(\vec{s}) \approx f(\vec{x_0}) + (\vec{s} - \vec{x_0}) \cdot \nabla f(\vec{x_0})$$

Insbesondere $f(1,1,2) \approx 2 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \nabla f(\vec{x}_0)$ (6)

$f(2,3,2) \approx 2 + \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \nabla f(\vec{x}_0)$. (7)

Aus (8) und der Aufgabe wissen wir, dass

$$\nabla f(x_0) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = -1, \quad \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 3.$$

Da $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ keine Linearkombination von $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ist (da $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu = 0\\ \lambda+\mu = 0\\ \lambda = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu=0\\ \lambda=0\\ \lambda=1\end{cases}$ Widerspruch.

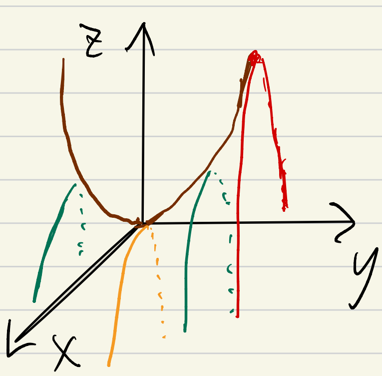
reicht die Information für $(1,1,2)$ nicht.

Da aber $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ gilt

$$f(2,3,2) \approx 2 + \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \nabla f(\vec{x}_0)$$

$$= 2 + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{v}} + \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(\vec{x}_0) = 2 - 1 + 3 = 4.$$

4b(i)



$x = 0 \Rightarrow z = y^2$

$y = 0 \Rightarrow z = -x^2$

$y = \pm 1 \Rightarrow z = 1 - x^2$

$y = 2 \Rightarrow z = 4 - x^2$

4b(ii) $\operatorname{div}\vec{w} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$ 1

$0 \leq z \leq y^2 - x^2$

über $z=0$. unter $z = y^2 - x^2$

$z = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm y$.

$y^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq x^2 \Rightarrow -y \leq x \leq y$.

Also $\iint_{\partial B} \vec{w} \cdot \vec{n}\, do = \iiint_B \operatorname{div}\vec{w}\, do = \int_1^2 \int_{-y}^{y} \int_0^{y^2-x^2} 3\, dz\, dx\, dy$

$= \int_1^2 \int_{-y}^{y} 3(y^2 - x^2)\, dx\, dy = \int_1^2 (3xy^2 - x^3) \Big|_{x=-y}^{x=y} dy$

$= \int_0^1 (6y^3 - 2y^3)\, dy = \int_1^2 4y^3\, dy = y^4 \Big|_1^2 = 15$.