HMII E-Technik März 2012 Lösungen

A1 a) $\underline{0 = \det(A - \lambda E)}$ = (geeignete Zeilen- und Spalten-umformungen)

$$= \underline{-(\lambda+2)(\lambda+1)^2} \qquad \underline{(1)}$$

$\underline{\text{EW}}$: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$

<u>Eigenraum zu λ_1</u> $(A+2E)\vec{v} = \vec{0}$

$$\Longleftrightarrow 2v_1 = -v_2, \quad -4v_1 = 3v_3$$

$$\Rightarrow \underline{E(\lambda_1 = -2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}} \qquad \underline{(2)}$$

<u>Eigenraum zu λ_2</u> $(A+E)\vec{v} = \vec{0}$

$$\Longleftrightarrow v_1 = -v_2, \quad v_1 = -v_3$$

$$\Rightarrow \underline{E(\lambda_1 = -1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}} \qquad \underline{(3)}$$

b) Aus (1) liest man ab:

<u>algebraische Vielfachheit</u> von λ_1 ist 1

von λ_2 ist 2

Aus (2), (3) liest man ab:

Die <u>geometrische Vielfachheit</u> von λ_1 und λ_2 ist jeweils 1

c) Eine Matrix P mit den geforderten Eigenschaften gibt es nicht, da für λ_2 die geometrische Vielfachheit und die algebraische Vielfachheit verschieden sind.

A2 a) $\vec{f}\,'(x,y) = [D_1\vec{f}(x,y), D_2\vec{f}(x,y)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1+3y^2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{f}$ ist injektiv auf $\mathbb{R}^2$.
Aus $\vec{f}(x_1,y_1) = \vec{f}(x_2,y_2)$ folgt $x_1 = x_2$ und hiermit

$y_1 + y_1^3 = y_2 + y_2^3 \Rightarrow y_1 = y_2$, da $v(t) = t + t^3$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wächst.

$\vec{f}$ ist surjektiv: Es sei $\binom{\xi}{\zeta} \in \mathbb{R}^2$. Es ist zu begründen, dass es ein $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{f}(x,y) = \binom{\xi}{\zeta}$ gibt.

$\vec{f}(x,y) = \binom{\xi}{\zeta} \Rightarrow x = \xi$ und $y + y^3 = \zeta - \xi$

Da $v(t) = t + t^3 \to -\infty$ für $t \to -\infty$
$\to +\infty$ für $t \to \infty$ gelten und da $v(t)$ streng wächst, gibt es nach dem Zwischenwertsatz (sogar genau) ein $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $y_0 + y_0^3 = \zeta - \xi$.
Es gilt also $\vec{f}(\xi, y_0) = \binom{\xi}{\zeta}$.

c) $\vec{h}\,'(x,y) = (\vec{f}^{-1})'(\vec{g}(x,y))\,\vec{g}\,'(x,y)$ (Kettenregel)

$= (\vec{f}\,'(\vec{g}(x,y)))^{-1}\,\vec{g}\,'(x,y)$ (Inverse Funktion Satz)

Also $\vec{h}\,'(0,0) = (\vec{f}\,'(\vec{g}(0,0)))^{-1}\,\vec{g}\,'(0,0)$

Es ist $\vec{g}(0,0) = \binom{0}{0}$, $(\vec{f}\,'(\vec{g}(0,0)))^{-1} = (\vec{f}\,'(0,0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{g}\,'(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(x+y)^2} & \frac{1}{1+(x+y)^2} \\ \cosh(x-y) & -\cosh(x-y) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{h}\,'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

HM II E-Technik / Physik März 2012 Lösungen

A3 a) Parametrisiere S mittels Kugelkoordinaten:

$$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} 4\cos\varphi\cos\vartheta \\ 4\sin\varphi\cos\vartheta \\ 4\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad 0<\vartheta\le\frac{\pi}{2}, \quad 0<\varphi\le 2\pi$$

$$d\vec{o} = (\partial_1\vec{r}\times\partial_2\vec{r})(\varphi,\vartheta)\,d(\varphi,\vartheta) = 16\begin{pmatrix}\cos^2\vartheta\cos\varphi \\ \cos^2\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\vartheta\end{pmatrix} d(\varphi,\vartheta)$$

$$\nabla\times\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix}4yz \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = 16\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(4\cdot 16\sin\varphi\sin\vartheta\cos^3\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\cos\vartheta\right)d\varphi\, d\vartheta$$

$$= 0 + 8\cdot 2\pi\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\vartheta)\,d\vartheta = \underline{16\pi}$$

b) $$\underline{I} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} \quad \text{mit} \quad C: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix}4\cos t \\ 4\sin t \\ 0\end{pmatrix}, \quad 0\le t\le 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt = \int_0^{2\pi}(8\cos t - 4\sin t)(-4\sin t)\,dt$$

$$= \underbrace{-32\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\,dt}_{=0} + 16\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hinweis}}}{=} 16\cdot\frac{1}{2}2\pi = \underline{16\pi}$$