Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Frühjahr 2013
05.03.2013

Bachelor-Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 **($4 + 2 + 4 = 10$ Punkte)**

a) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte sowie die dazugehörigen Eigenräume.

b) Gegeben sei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det B = 1$ und $\operatorname{Spur} B = 1$. Berechnen Sie die Eigenwerte von B. Ist B diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Im Vektorraum $C^0(\mathbb{R})$ der auf $\mathbb{R}$ stetigen Funktionen seien die Funktionen $b_1, b_2, b_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$b_1(x) = 1, \quad b_2(x) = \cos x, \quad b_3(x) = \cos^2(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Es sei $U := \operatorname{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$. Ist b_1, b_2, b_3 eine Basis von U? Man definiere $\phi(b_j) = b_{4-j}$, für $j = 1, 2, 3$. Lässt sich diese Abbildung zu einer linearen Abbildung $\phi : U \to U$ auf den ganzen Vektorraum U fortsetzen? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

Zeigen Sie $v \in U$ für die Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto v(x) = \cos(2x)$, und berechnen Sie $\phi(v)$.

Aufgabe 2 **($5 + 5 = 10$ Punkte)**

a) Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1), x + y \in (0, 1]\}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{1-x-y}{x+y}, \quad (x, y) \in D.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f im Inneren von D und die Funktionswerte von f in diesen Stellen.

Untersuchen Sie anschließend, ob f auf ganz D ein Minimum annimmt, und bestimmen Sie dieses Minimum gegebenenfalls.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion. Berechnen Sie den Limes

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h, h) + f(h, -h) + f(-h, h) + f(-h, -h) - 4f(0, 0)}{h^2}$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 $(3+3+4=10$ Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix}1+x+yz\\1+y+xz\\1+z+xy\end{pmatrix},$$

und die Kurve $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3$, $\gamma(t)=\begin{pmatrix}t\\ sin(\pi t^2)\\ \frac{t}{2-t}\end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}.$$

b) Sei $G:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\geq 1, z\geq 0, x^2+y^2+z^2\leq 4\}$. Berechnen Sie das Volumen von G.

c) Sei G wie in (b) und das Vektorfeld $\vec{w}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ gegeben durch $\vec{w}(x,y,z)=\begin{pmatrix}y^2\\x^2\\z^2\end{pmatrix}$.

Mit $\mathcal{F}$ sei die Oberfläche ∂G von G bezeichnet, wobei der Normalenvektor $\vec{N}$ nach außen orientiert sei. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w}\cdot\vec{N}\,do.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, den 26.03.2013, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 17.04.2013, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 22.04.2013 bis 26.04.2013 im Allianz-Gebäude 05.20.