Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. D. Hundertmark

Frühjahr 2013
05.03.2013

Bachelor-Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 $(4 + 2 + 4 = 10$ Punkte$)$

a) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte sowie die dazugehörigen Eigenräume.

b) Gegeben sei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det B = 1$ und $\operatorname{Spur} B = 1$. Berechnen Sie die Eigenwerte von B. Ist B diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Im Vektorraum $C^0(\mathbb{R})$ der auf $\mathbb{R}$ stetigen Funktionen seien die Funktionen $b_1, b_2, b_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$b_1(x) = 1, \quad b_2(x) = \cos x, \quad b_3(x) = \cos^2(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Es sei $U := \operatorname{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$. Ist b_1, b_2, b_3 eine Basis von U? Wird durch $\phi(b_j) = b_{4-j}$, $j = 1, 2, 3$, eine lineare Abbildung $\phi : U \to U$ definiert? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

Zeigen Sie $v \in U$ für die Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto v(x) = \cos(2x)$, und berechnen Sie $\phi(v)$.

Lösungsvorschlag

a) Das charakteristische Polynom der Matrix A ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 1).$$

Also hat A die drei Eigenwerte $0, 3, 1$ jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Auch die geometrische Vielfachheit ist also jeweils 1. Man berechnet fÃ¼r die Eigenräume:

$$\begin{aligned}
E_A(0) &= \operatorname{Kern} A - 0 \cdot I = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\
E_A(1) &= \operatorname{Kern} A - 1 \cdot I = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\
E_A(3) &= \operatorname{Kern} A - 3 \cdot I = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

b) Die Eigenwerte von B seien mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ bezeichnet. Da die Determinante das Produkt der Eigenwerte und die Spur die Summe der Eigenwerte ist, erhalten wir $\lambda_1\lambda_2 = 1$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Somit ist $\lambda_2 = 1/\lambda_1$ und durch Einsetzen ergibt sich $\lambda_1 + 1/\lambda_1 = 1$ bzw. $\lambda_1^2 - \lambda_1 + 1 = 0$ mit Lösung

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Wegen $\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = 1$ gilt somit

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\},$$

und beide Eigenwerte sind verschieden. Damit ist die geometrische Vielfachheit jeweils 1 und die Matrix B ist diagonalisierbar.

c) Die Funktionen b_1, b_2, b_3 bilden eine Basis von U, denn sie sind linear unabhängig: Sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 0$, so gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos^2(x) = \alpha b_1(x) + \beta b_2(x) + \gamma b_3(x) = 0.$$

Mit $x = \pi/2$ erhält man $\alpha = 0$, mit $x = 0$ erhält man $\beta + \gamma = 0$, und mit $x = \pi$ erhalt man $-\beta + \gamma = 0$, so dass insgesamt $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt.

Durch $\phi(b_j) := b_{4-j}$ wird eine genau eine lineare Abbildung $\phi : U \to U$ definiert, da b_1, b_2, b_3 eine Basis von U ist.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$v(x) = \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 2b_3(x) - b_1(x).$$

Es gilt also $v = 2b_3 - b_1 \in U$ und

$$\phi(v) = 2\phi(b_3) - \phi(b_1) = 2b_1 - b_3, \quad \phi(v)(x) = 2 - \cos^2(x), \ (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1), x + y \in (0, 1]\}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{1-x-y}{x+y}, \quad (x, y) \in D.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f im Inneren von D und die Funktionswerte von f in diesen Stellen.

Untersuchen Sie anschließend, ob f auf ganz D ein Minimum annimmt, und bestimmen Sie dieses Minimum gegebenenfalls.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzienzierbare Funktion. Berechnen Sie den Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h, h) + f(h, -h) + f(-h, h) + f(-h, -h) - 4f(0, 0)}{h^2}.$$

Lösungsvorschlag

a) Das Innere von D ist das offene Dreieck in der (x,y)-Ebene mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} - 3.$$

Für Punkte (x,y) im Inneren von D ist der Gradient von f gegeben durch

$$f_x(x,y) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Somit haben wir $f_x = 0 = f_y$ genau dann, wenn

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{1}{(1-y)^2},$$

also genau dann, wenn $1-x = x+y = 1-y$, dh genau dann, wenn $x = y = 1/3$. Es gilt $f(1/3,1/3) = 3/2$. Für die zweiten Ableitungen gilt:

$$f_{xx} = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}, \quad f_{xy} = \frac{2}{(x+y)^3}, \quad f_{yy} = \frac{2}{(1-y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}.$$

Somit ist die Hesse-Matrix im Punkt $(1/3,1/3)$ gegeben durch $(\frac{3}{2})^3 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Da sowohl Determinante als auch Spur dieser Matrix positiv sind, ist sie positiv definit. Also hat f an der Stelle $(1/3,1/3)$ ein lokales Minimum.

Wir untersuchen f auf den drei Randstrecken von D. Es ist

$$f(0,y) = \frac{y}{1-y} + \frac{1-y}{y} \geq 2, \quad f(x,0) = f(x,1-x) = \frac{x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 2,$$

denn $a + a^{-1} - 2 = a^{-1}(a^2 - 2a + 1) = a^{-1}(a-1)^2 \geq 0$ für $a > 0$. Außerdem gilt $f(x,y) \to \infty$ für $(x,y) \to (0,0)$, $(x,y) \to (1,0)$ und $(x,y) \to (0,1)$.

Folglich besitzt f auf D ein Minimum und dieses Minimum hat den Wert $f(1/3,1/3) = 3/2$.

b) Seien $\sigma, \tau \in \{-1,1\}$ und $h \neq 0$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein $\vec{\xi} = \vec{\xi}(h,\sigma,\tau)$ auf der Verbindungsstrecke von $(0,0)$ und $(\sigma h, \tau h)$ so, dass

$$f(\sigma h, \tau h) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(H_f(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet man den Ausdruck im gesuchten Limes mit $A(h)$, so hat man also

$$A(h) = \frac{1}{h^2}\left(\nabla f(0,0) \cdot \underbrace{\sum_{\sigma,\tau\in\{-1,1\}} \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}}_{=\vec{0}} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau\in\{-1,1\}} \left(H_f(\vec{\xi}(h,\sigma,\tau)) \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \sigma h \\ \tau h \end{pmatrix}\right).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2}\left(H_f(\vec{\xi})\begin{pmatrix}\sigma h\\ \tau h\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}\sigma h\\ \tau h\end{pmatrix} &= \frac{1}{h^2}\left(\sigma^2h^2f_{xx}(\vec{\xi})+2\sigma\tau h^2 f_{xy}(\vec{\xi})+\tau^2h^2f_{yy}(\vec{\xi})\right)\\ &= (\Delta f)(\vec{\xi})+2\sigma\tau f_{xy}(\vec{\xi})\longrightarrow \Delta f(0,0)+2\sigma\tau f_{x,y}(0,0)\end{aligned}$$

für $h\to 0$. Also ist der gesuchte Limes

$$\lim_{h\to 0} A(h) = 2(\Delta f)(0,0) + f_{xy}(0,0)\underbrace{\sum_{\sigma,\tau\in\{-1,1\}}\sigma\tau}_{=0} = 2(\Delta f)(0,0).$$

Aufgabe 3 $\quad$ (3 + 3 + 4 = 10 Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix}1+x+yz\\1+y+xz\\1+z+xy\end{pmatrix},$$

und die Kurve $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3$, $\gamma(t)=\begin{pmatrix}t\\ \sin(\pi t^2)\\ \frac{t}{2-t}\end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}.$$

b) Sei $G:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\geq 1, z\geq 0, x^2+y^2+z^2\leq 4\}$. Berechnen Sie das Volumen von G.

c) Sei G wie in (b) und das Vektorfeld $\vec{w}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ gegeben durch $\vec{w}(x,y,z)=\begin{pmatrix}y^2\\x^2\\z^2\end{pmatrix}$.

Mit $\mathcal{F}$ sei die Oberfläche ∂G von G bezeichnet, wobei der Normalenvektor $\vec{N}$ nach außen orientiert sei. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w}\cdot\vec{N}\,do.$$

Lösungsvorschlag

a) Das Vektorfeld $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ ist beliebig oft auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbar und es gilt:

$$(v_1)_y = Z = (v_2)_x,\ (v_1)_z = y = (v_3)_x,\ (v_2)_z = x = (v_3)_y.$$

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Ein Potential $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ zu $\vec{v}$ ist gegeben durch

$$F(x,y,z)=x+x^2/2+xyz+y+y^2/2+z+z^2/2,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Für das Integral erhält man also

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = F(\gamma(1))-F(\gamma(0)) = F(1,0,1)-F(0,0,0)=3.$$

b) G ist eine Halbkugel mit Radius 2 um $\vec{0}$, aus welcher der Zylinder $\{(x, y, z) : x^2+y^2 < 1\}$ "ausgebohrt" ist. Wir verwenden Zylinderkoordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$. Das Volumen von G ist dann

$$\begin{aligned}\iiint_G 1\, d\tau &= \iint_{\{1\le x^2+y^2\le 4\}} \int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} 1\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{4-r^2}r\, dr\, d\phi = 2\pi\left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}\right]_{r=1}^{r=2} = 2\pi\sqrt{3}.\end{aligned}$$

c) Wir verwenden den Divergenzsatz

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w}\cdot\vec{N}\, do = \iiint_G \operatorname{div}\vec{w}\, d\tau.$$

Dabei gilt

$$\operatorname{div}\vec{w}(x, y, z) = 2z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Wir erhalten somit wieder mit Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{F}} \vec{w}\cdot\vec{N}\, do = \iiint_G z\, d\tau &= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-r^2}} 2z\, dz\, r\, rd\, d\phi = 2\pi\int_1^2 (4-r^2)r\, dr \\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{4}(4-r^2)^2\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{9}{2}\pi.\end{aligned}$$